



# Kalkulus Peubah Banyak Berbantuan Geogebra

Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.  
Siti Dwi Rahayu Septiani, S.Pd., M.Pd.  
Cecep Suwanda, S.Si., M.Kom.  
Dr. Wulan Nurul Kamilah, S.Pd., M.Si.  
Fadli Azis, S. Si., M.Mat.

Tahun Terbit : 2025

# Kalkulus Peubah Banyak Berbantuan Geogebra

Belajar *Kalkulus Peubah Banyak* sering kali terasa abstrak dan penuh perhitungan rumit. Buku ajar ini hadir untuk menjembatani kesulitan tersebut melalui bantuan **GeoGebra**, sebuah perangkat lunak dinamis yang memungkinkan visualisasi konsep secara interaktif.

Dengan pendekatan yang praktis, buku ini memandu mahasiswa memahami fungsi multivariable, turunan parsial, gradien, integral lipat, hingga integral permukaan, sambil melihat langsung representasi grafisnya. Disertai contoh soal, latihan, serta eksplorasi berbasis GeoGebra, pembaca diajak tidak hanya menguasai prosedur, tetapi juga membangun intuisi matematis yang lebih kuat.

Buku ini tepat digunakan sebagai pendamping kuliah maupun belajar mandiri, sekaligus sebagai bekal mengintegrasikan teknologi dalam studi matematika modern.



Ganesha  
KreasiSemesta



ganeshakreasisemesta@gmail.com



www.ganeshakreasisemesta.com



0852-8000-2192



Anggota IKAPI

No. 281/JTE/2024

ISBN 978-634-7403-59-9



9

786347

403599

# **KALKULUS PEUBAH BANYAK BERBANTUAN GEOGEBRA**

**Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.**  
**Siti Dwi Rahayu Septiani, S.Pd., M.Pd.**  
**Cecep Suwanda, S.Si., M.Kom.**  
**Dr. Wulan Nurul Kamilah, S.Pd., M.Si.**  
**Fadli Azis, S. Si., M.Mat.**



**PENERBIT PT. GANESHA KREASI SEMESTA**

# **KALKULUS PEUBAH BANYAK BERBANTUAN GEOGEBRA**

**Penulis** : Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.  
Siti Dwi Rahayu Septiani, S.Pd., M.Pd.  
Cecep Suwanda, S.Si., M.Kom.  
Dr. Wulan Nurul Kamilah, S.Pd., M.Si.  
Fadli Azis, S. Si., M.Mat.

**Desain Sampul** : Firman Isma'il

**Tata Letak** : Meuthia Rahmi Ramadani

**ISBN** : 978-634-7403-59-9

Diterbitkan oleh : **GANESHA KREASI SEMESTA,  
OKTOBER 2025  
ANGGOTA IKAPI JAWA TENGAH  
NO. 281/JTE/2024**

**Redaksi:**

Jalan Panongan, Desa Kutasari Kecamatan Baturraden  
Kabupaten Banyumas Telp. 0852-8000-2192  
Surel : ganeshakreasisemesta@gmail.com  
Cetakan Pertama : 2025

**All right reserved**

Hak Cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh  
isi buku ini dalam bentuk apapun dan dengan cara apapun,  
termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman  
lainnya tanpa seizin tertulis dari penerbit.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya sehingga bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Penyusunan bahan ajar ini didasarkan pada kebutuhan mahasiswa yang sering mengalami kesulitan dalam mempelajari Kalkulus Peubah Banyak, terutama dalam aspek visualisasi konsep dan keterhubungan antarrepresentasi matematis. Untuk itu, digunakan perangkat lunak **GeoGebra** agar konsep abstrak dapat divisualisasikan secara interaktif dan mudah dipahami.

Beberapa topik yang memanfaatkan GeoGebra antara lain: **Fungsi Peubah Banyak**, untuk memvisualisasikan grafik permukaan dan kontur fungsi dua variabel; **Limit dan Kekontinuan**, untuk menunjukkan pendekatan nilai fungsi secara dinamis; **Derivatif Parsial**, untuk menggambarkan kemiringan bidang singgung dan arah perubahan maksimum; **Integral Lipat Dua**, untuk memperlihatkan hubungan antara daerah integrasi dan volume; serta **Teorema Green**, untuk menunjukkan keterkaitan antara integral garis dan integral lipat dua melalui simulasi interaktif.

Pemilihan topik-topik tersebut didasarkan pada kebutuhan visualisasi konseptual agar mahasiswa tidak hanya menguasai prosedur perhitungan, tetapi juga mampu **menafsirkan konsep secara visual dan kontekstual**. Kami menyadari bahan ajar ini masih memiliki keterbatasan, sehingga kritik dan saran sangat diharapkan. Semoga bahan ajar ini bermanfaat dalam meningkatkan kualitas pembelajaran **Kalkulus Peubah Banyak** di perguruan tinggi.

Tim Penulis

## DAFTAR ISI

|                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| KATA PENGANTAR.....                                                      | iii       |
| DAFTAR ISI .....                                                         | iv        |
| <b>BAB 1 FUNGSI PEUBAH BANYAK .....</b>                                  | <b>1</b>  |
| A. Pendahuluan .....                                                     | 1         |
| B. Materi .....                                                          | 2         |
| 1. Fungsi Peubah Banyak.....                                             | 2         |
| 2. Domain $D(f)$ dan Range $R(f)$ .....                                  | 3         |
| 3. Fungsi Eksplisit dan Fungsi Implisit.....                             | 5         |
| C. Rangkuman .....                                                       | 7         |
| D. Latihan/Tugas .....                                                   | 7         |
| E. Terapan pada Geogebra .....                                           | 9         |
| F. Terapan pada Geogebra (Menggambar Fungsi<br>Implisit).....            | 11        |
| <b>BAB 2 LIMIT DAN KEKONTINUAN .....</b>                                 | <b>15</b> |
| A. Pendahuluan .....                                                     | 15        |
| B. Materi .....                                                          | 15        |
| 1. Limit .....                                                           | 15        |
| 2. Kekontinuan .....                                                     | 16        |
| C. Rangkuman .....                                                       | 20        |
| D. Latihan/Tugas .....                                                   | 20        |
| E. Terapan pada Geogebra (Menentukan<br>Kekontinuan Melalui Grafik)..... | 23        |
| <b>BAB 3 DERIVATIF PARSIAL.....</b>                                      | <b>29</b> |
| A. Pendahuluan .....                                                     | 29        |
| B. Materi .....                                                          | 29        |
| 1. Turunan Parsial.....                                                  | 29        |
| C. Rangkuman .....                                                       | 32        |
| D. Latihan/Tugas .....                                                   | 33        |
| E. Terapan pada Geogebra .....                                           | 35        |
| <b>BAB 4 DERIVATIF FUNGSI IMPLISIT .....</b>                             | <b>40</b> |
| A. Pendahuluan .....                                                     | 40        |
| B. Materi .....                                                          | 40        |
| 1. Derivatif Fungsi Implisit.....                                        | 40        |
| 2. Determinan Jacobian .....                                             | 41        |

|              |                                                                                |           |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|              | C. Rangkuman .....                                                             | 44        |
|              | D. Latihan/Tugas .....                                                         | 45        |
| <b>BAB 5</b> | <b>NILAI EKSTRIM BERSYARAT .....</b>                                           | <b>49</b> |
|              | A. Pendahuluan .....                                                           | 49        |
|              | B. Materi .....                                                                | 49        |
|              | 1. Nilai Ekstrim Bersyarat .....                                               | 49        |
|              | C. Rangkuman .....                                                             | 53        |
|              | D. Latihan/Tugas .....                                                         | 53        |
|              | E. Terapan pada Geogebra (Mencari Titik Ekstrim<br>Menggunakan Geogebra) ..... | 60        |
| <b>BAB 6</b> | <b>FORMULA DAN DERET TAYLOR .....</b>                                          | <b>64</b> |
|              | A. Pendahuluan .....                                                           | 64        |
|              | B. Materi .....                                                                | 64        |
|              | 1. Formula dan Deret Taylor .....                                              | 64        |
|              | C. Rangkuman .....                                                             | 70        |
|              | D. Latihan/Tugas .....                                                         | 70        |
| <b>BAB 7</b> | <b>INTEGRAL FUNGSI BERNILAI VEKTOR.....</b>                                    | <b>74</b> |
|              | A. Pendahuluan .....                                                           | 74        |
|              | B. Materi .....                                                                | 75        |
|              | 1. Pengertian Fungsi Bernilai Vektor .....                                     | 75        |
|              | 2. Contoh Fungsi Bernilai Vektor .....                                         | 75        |
|              | 3. Operasi pada Fungsi Bernilai Vektor .....                                   | 75        |
|              | 4. Aplikasi .....                                                              | 76        |
|              | C. Rangkuman .....                                                             | 77        |
|              | D. Latihan/Tugas .....                                                         | 77        |
| <b>BAB 8</b> | <b>INTEGRAL LIPAT DUA .....</b>                                                | <b>82</b> |
|              | A. Pendahuluan .....                                                           | 82        |
|              | B. Materi .....                                                                | 82        |
|              | 1. Integral Lipat Dua .....                                                    | 82        |
|              | 2. Definisi .....                                                              | 84        |
|              | 3. Sifat-Sifat Integral Lipat Dua .....                                        | 84        |
|              | 4. Perhitungan Integral Lipat Dua .....                                        | 85        |
|              | C. Rangkuman .....                                                             | 86        |
|              | D. Latihan/Tugas .....                                                         | 86        |
|              | E. Terapan pada Geogebra.....                                                  | 92        |

|               |                                                             |            |
|---------------|-------------------------------------------------------------|------------|
| <b>BAB 9</b>  | <b>INTEGRAL LIPAT TIGA.....</b>                             | <b>96</b>  |
|               | A. Pendahuluan.....                                         | 96         |
|               | B. Materi.....                                              | 96         |
|               | 1. Integral Lipat Tiga .....                                | 96         |
|               | C. Rangkuman.....                                           | 98         |
|               | D. Latihan/Tugas.....                                       | 98         |
| <b>BAB 10</b> | <b>INTEGRAL GARIS DENGAN PARAMETER.....</b>                 | <b>102</b> |
|               | A. Pendahuluan.....                                         | 102        |
|               | B. Materi.....                                              | 102        |
|               | 1. Integral Garis dengan Parameter .....                    | 102        |
|               | C. Rangkuman.....                                           | 107        |
|               | D. Latihan/Tugas.....                                       | 107        |
| <b>BAB 11</b> | <b>TEOREMA GREEN .....</b>                                  | <b>112</b> |
|               | A. Pendahuluan.....                                         | 112        |
|               | B. Materi.....                                              | 112        |
|               | 1. Definisi Teorema Green .....                             | 112        |
|               | C. Rangkuman.....                                           | 114        |
|               | D. Latihan/Tugas.....                                       | 115        |
|               | E. Terapan pada Geogebra .....                              | 121        |
| <b>BAB 12</b> | <b>TEOREMA DIVERGENSI .....</b>                             | <b>126</b> |
|               | A. Pendahuluan.....                                         | 126        |
|               | B. Materi.....                                              | 127        |
|               | 1. Definisi Teorema Divergensi.....                         | 127        |
|               | 2. Interpretasi Geometris dan Fisik .....                   | 127        |
|               | 3. Syarat Berlaku Teorema.....                              | 127        |
|               | 4. Contoh Divergensi.....                                   | 127        |
|               | C. Rangkuman.....                                           | 129        |
|               | D. Latihan/Tugas.....                                       | 129        |
| <b>BAB 13</b> | <b>TEOREMA STOKES .....</b>                                 | <b>132</b> |
|               | A. Pendahuluan.....                                         | 132        |
|               | B. Materi.....                                              | 133        |
|               | 1. Pernyataan Teorema Stokes .....                          | 133        |
|               | 2. Interpretasi Geometris dan Fisik .....                   | 133        |
|               | 3. Langkah Penyelesaian Menggunakan<br>Teorema Stokes ..... | 134        |
|               | C. Rangkuman.....                                           | 135        |



|                              |            |
|------------------------------|------------|
| D. Latihan/Tugas .....       | 135        |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>  | <b>140</b> |
| <b>TENTANG PENULIS .....</b> | <b>142</b> |



# **KALKULUS PEUBAH BANYAK BERBANTUAN GEOGEBRA**

**Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.**

**Siti Dwi Rahayu Septiani, S.Pd., M.Pd.**

**Cecep Suwanda, S.Si., M.Kom.**

**Dr. Wulan Nurul Kamilah, S.Pd., M.Si.**

**Fadli Azis, S. Si., M.Mat.**



# BAB

# 1

## FUNGSI PEUBAH BANYAK

### A. Pendahuluan

Bab ini membahas dasar-dasar konsep fungsi yang melibatkan lebih dari satu variabel. Pemahaman mengenai fungsi satu variabel, sebagaimana dipelajari dalam mata kuliah Kalkulus I dan Kalkulus II, diasumsikan telah dikuasai oleh pembaca.

Pembahasan didukung dengan pemanfaatan GeoGebra sebagai alat bantu visualisasi, sehingga pembaca dapat mengamati grafik, bentuk permukaan, serta menelusuri karakteristik fungsi secara interaktif. Melalui GeoGebra, hubungan antara ekspresi aljabar dengan representasi ruang dapat dianalisis lebih mendalam, terutama pada fungsi dua variabel maupun fungsi berdimensi lebih tinggi.

Setelah menyelesaikan materi pada bab ini, pembaca diharapkan mampu memahami dan menjelaskan konsep serta karakteristik fungsi banyak variabel, sekaligus menggunakan GeoGebra sebagai media eksplorasi. Secara khusus, capaian pembelajaran yang ditargetkan mencakup:

1. Menjelaskan konsep fungsi dua variabel.
2. Menentukan domain dan range fungsi dua variabel serta meng gambarkannya dengan bantuan GeoGebra.
3. Menguraikan sifat-sifat dari fungsi dua variabel.
4. Menjelaskan konsep fungsi tiga, empat, hingga  $n$  variabel.
5. Memberikan contoh fungsi tiga, empat, hingga  $n$  variabel.

6. Menyatakan fungsi dalam bentuk eksplisit serta menyajikan visualisasinya menggunakan GeoGebra.
7. Mengenali dan mengeksplorasi fungsi yang didefinisikan secara implisit dengan bantuan GeoGebra.

## **B. Materi**

### **1. Fungsi Peubah Banyak**

Sebelum mempelajari fungsi dua variabel, terlebih dahulu perlu ditinjau kembali konsep dasar fungsi satu variabel sebagai penguatan pemahaman. Secara umum, fungsi satu variabel dinyatakan dalam bentuk  $y = f(x)$ , dengan  $x$  sebagai variabel tunggal. Daerah asal (domain) fungsi ini mencakup seluruh nilai  $x$  yang menghasilkan keluaran berupa bilangan real. Oleh karena itu, domain fungsi satu variabel dapat digambarkan sebagai interval yang bersifat linier atau berdimensi satu (Anton et al., 2012; Stewart, 2016).

Fungsi dua variabel dapat dijelaskan sebagai berikut (Anton et al., 2012; Stewart, 2016).

#### **Definisi**

Domain suatu fungsi juga dikenal sebagai daerah definisi atau daerah asal, sedangkan kodomain sering disebut daerah kawan. Adapun range biasanya disebut sebagai daerah hasil, daerah nilai, atau jelajah.

Untuk fungsi dua variabel yang dinyatakan dalam bentuk  $z = f(x, y)$ , domainnya berbentuk suatu wilayah dua dimensi yang terdiri dari seluruh pasangan titik  $(x, y)$  yang dapat dimasukkan ke dalam fungsi untuk menghasilkan nilai keluaran (Anton et al., 2012; Stewart, 2016).

Pada fungsi  $z = f(x, y)$ , variabel  $x$  dan  $y$  berperan sebagai variabel bebas, sementara  $z$  disebut variabel terikat. Fungsi tersebut digolongkan sebagai fungsi dua variabel. Jika suatu fungsi melibatkan tiga variabel, maka disebut fungsi tiga variabel, dan seterusnya.

Dalam kegiatan pembelajaran, GeoGebra dimanfaatkan untuk menampilkan representasi domain, jelajah, serta grafik permukaan fungsi. Melalui visualisasi interaktif ini, mahasiswa dapat mengamati hubungan antara bentuk aljabar dan representasi geometrisnya, sehingga pemahaman mengenai konsep fungsi multivariabel menjadi lebih mendalam dan aplikatif.

Contoh fungsi dua peubah:

- a.  $f(x, y) = 3x + 2y - 5$
- b.  $f(x, y) = x^2 + xy - 4$
- c.  $f(m, n) = e^{m+2n}$

Contoh fungsi tiga peubah:

- a.  $f(p, q, r) = p^2 - 2q^3 - 2r$
- b.  $f(x, y, z) = xz^2 + y^2 - 3z$
- c.  $f(m, n, p) = 2e^{3m} \cos p + \ln(1 + n^2)$

## 2. Domain $D(f)$ dan Range $R(f)$

Jika suatu fungsi dinyatakan dengan  $f$ , maka  $D(f)$  adalah himpunan domain atau daerah asal tempat fungsi tersebut berlaku. Sementara itu,  $R(f)$  merupakan himpunan hasil (range) yang terdiri atas semua nilai yang dapat dihasilkan oleh fungsi  $f$ .

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 | f(x, y) \in R\}$$

$$R(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in D_f\}$$

Tahap berikutnya adalah menentukan  $D(f)$  dan  $R(f)$  dari suatu fungsi yang diberikan.

### Contoh

Identifikasilah **domain**  $D(f)$  dan **range**  $R(f)$  dari fungsi-fungsi berikut.

- a.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$
- b.  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
- c.  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+y}$

### Pembahasan:

a.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

Domain  $D(f)$

Polinomial dalam  $x$  dan  $y$  terdefinisi untuk semua pasangan real, jadi  $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Range  $R(f)$

Karena  $x^2 + y^2 \geq 0$  untuk semua  $x, y$  nilai minimum dari  $x^2 + y^2$  adalah 0. Maka nilai minimum  $f$  adalah  $0 - 5 = -5$ , dan tidak ada batas atas. Jadi  $R(f) = [-5, \infty)$ .

b.  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Domain  $D(f)$

Argumen akar harus non-negatif:  $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ , sehingga  $x^2 + y^2 \leq 16$ .

Jadi domain adalah semua titik pada dan di dalam lingkaran jari-jari 4 pusat di origin:

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Range  $R(f)$

Nilai akar kuadrat menghasilkan bilangan real  $\geq 0$ .

Maksimum terjadi saat  $x^2 + y^2$  minimal (yaitu 0), sehingga

$f_{\max} = \sqrt{16} = 4$ . Minimum terjadi saat argumen = 0 sehingga  $f_{\min} = 0$ . Jadi  $R(f) = [0, 4]$ .

c.  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+y}$

Domain  $D(f)$

Syarat-syarat:

1) Argumen akar  $\geq 0 \rightarrow x - 1 \geq 0$  sehingga  $x \geq 1$ .

2) Penyebut tidak boleh nol  $\rightarrow x + y \neq 0$ .

Dengan demikian

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1, y \neq -x\}.$$

Range  $R(f)$

Tinjau nilai-nilai yang mungkin dicapai:

1) Jika  $x = 1$ , pembilang  $\sqrt{1-1} = 0$  sehingga  $f(1, y) = 0$  untuk setiap  $y \neq -1$ . Jadi 0 tercapai.

- 2) Untuk setiap  $x > 1$  pembilang  $t = x - 1 > 0$ . Pada  $x$  tetap,  $x + y$  dapat berupa sembarang bilangan real selain 0 (karena  $y$  bebas kecuali  $y = -x$ ). Dengan membiarkan  $x + y$  mendekati  $0^+$  atau  $0^-$ , nilai  $\frac{t}{x+y}$  dapat menjadi arbitrarily large positif maupun negatif; dengan  $x + y$  besar magnitude, nilai mendekati 0. Jadi untuk  $x > 1$  dapat dihasilkan nilai berangka sangat besar positif maupun negatif, dan nilai mendekati 0 (namun untuk  $x > 1$  tidak pernah tepat 0). Karena 0 sudah dicapai pada  $x = 1$  dan nilai positif maupun negatif arbitrer dapat dicapai untuk  $x > 1$  dengan memilih  $y$  sesuai, keseluruhan himpunan nilai fungsi adalah seluruh bilangan real. Jadi

$$R(f) = R.$$

### 3. Fungsi Eksplisit dan Fungsi Implisit

Beberapa fungsi terdiri dari fungsi peubah tak bebas ( $f(x, y)$ ) dan peubah  $x$  dan  $y$  yang letaknya terpisah pada ruas yang berlainan. Fungsi ini dinamakan **fungsi eksplisit**. Bentuk umum fungsi ini dituliskan sebagai  $f(x, y) = F$ , dimana  $F$  merupakan fungsi yang terdiri atas peubah bebas  $x$  dan atau  $y$ .

Jika pada suatu fungsi, antar peubah tak bebas ( $f(x, y)$ ) dengan peubah bebas  $x$  dan atau  $y$  terletak pada ruas yang sama, tidak dapat dipisah pada ruas yang berlainan, maka disebut **fungsi implisit**. Bentuk umum fungsi ini dituliskan sebagai  $f(x, y) = 0$ .

(Marsden & Tromba, 2012; Purcell & Varberg, 1987).

#### Contoh Fungsi Eksplisit dan Fungsi Implisit

a. Contoh fungsi eksplisit

- 1)  $2x^5 + y^7 = x^5$
- 2)  $xw - y^2w - 3 = 0$
- 3)  $x^3y^2z - y^2z + z = -7$

b. Contoh fungsi implisit

1)  $x^3y^2 - 7xz^5y = x^2 + z^3$

2)  $\sin(xy) + \tan z - x^2 = 0$

3)  $y^3 \cos(3z - 7x) = 1 + z \sin(8xy)$

**Pembahasan:**

a. Pada contoh fungsi eksplisit tersebut,

1)  $2x^5 + y^7 = x^5 \leftrightarrow y^7 = x^5 - 2x^5 \leftrightarrow y^7 = -x^5$

Nampak bahwa peubah  $x$  dan peubah  $y$  dapat dipisah pada ruas yang berlainan. Oleh karenanya, persamaan  $2x^5 + y^7 = x^5$  merupakan **fungsi eksplisit**.

2)  $xw - y^2w - 3 = 0 \leftrightarrow x = \frac{y^2w+3}{w}$   
 $\leftrightarrow y^2 = \frac{xw-3}{w}$   
 $\leftrightarrow w = \frac{3}{x-y^2}$

Peubah  $x$  terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah  $y$  dan  $w$ , peubah  $y$  terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah  $x$  dan peubah  $w$ , peubah  $w$  terpisah dengan peubah  $x$  dan peubah  $y$ . Oleh karenanya, persamaan  $xw - y^2w - 3 = 0$  merupakan **fungsi eksplisit**.

3)  $x^3y^2z - y^2z + z = -7 \leftrightarrow x^3 = \frac{y^2z-z-7}{y^2z}$

atau

$$y^2z(x^3 - 1) + z = -7 \leftrightarrow y^2z = \frac{-7-z}{x^3-1}$$
$$\leftrightarrow y^2 = \frac{-7-z}{z(x^3-1)}$$

atau

$$z(x^3y^2 - y^2 + 1) = -7 \leftrightarrow z = \frac{-7}{x^3y^2 - y^2 + 1}$$

Peubah  $x$  terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah  $y$  dan  $z$ , peubah  $y$  terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah  $x$  dan peubah  $z$ ,



peubah  $z$  terpisah dengan peubah  $x$  dan peubah  $y$ . Oleh karenanya, persamaan  $x^3y^2z - y^2z + z = -7$  merupakan **fungsi eksplisit**.

b. Pada contoh fungsi implisit tersebut,

$$1) 2x^5 + y^7 = 5xy \leftrightarrow 2x^5 + y^7 - 5xy = 0$$

$$2) x^3y^2 - 7xz^5y = x^2 + z^3$$

$$3) y^3 \cos(3z - 7x) = 1 + z \sin(8xy)$$

Semua persamaan 1), 2), dan 3) tidak dapat dipisahkan pada ruas yang berlainan.

### C. Rangkuman

Fungsi dua variabel adalah aturan yang mengaitkan setiap pasangan terurut  $(x, y)$  dengan tepat satu  $z = f(x, y)$ .

Domain disimbolkan dengan  $D(f)$  dan *range* disimbolkan dengan  $R(f)$ .

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 | f(x, y) \in R\}$$

$$R(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in D_f\}$$

Fungsi **eksplisit** dan fungsi **implisit** ditentukan berdasarkan peubah tak bebas dan peubah bebasnya yang terletak pada ruas yang sama atau berlainan.

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan domain  $D(f)$  dan range  $R(f)$  dari fungsi-fungsi berikut. (Skor 30)

$$a. f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$$

$$b. f(x, y) = x^2y \text{ untuk } x \geq 0$$

2. Periksa apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi **eksplisit** atau fungsi **implisit**. (Skor 30)

- a. Fungsi  $y^3 - 7xy = 3x^2 + 5$
  - b. Fungsi  $x^3y^2 - 7x^3y^2z^5 = x^3y^2 + y^2z^5$
  - c. Fungsi  $z \sin(x - y) - y^3z = x^3z$
3. Tuliskan contoh fungsi dua peubah, tiga peubah dan lima peubah masing-masing lima. **(Skor 40)**

**Pembahasan:**

1. Domain  $D(f)$  dan range  $R(f)$  dari fungsi-fungsi berikut.

a.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$   
 $x^2 + y^2 + z^2 > 9$ , **(skor 8)**

$$D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}} \in R\}$$

$$= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 9 \geq 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\} \text{ **(skor 6)**}$$

$$R(f) = \{f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}} \geq 0 \mid (x, y, z) \in R^3; |x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}$$

**(skor 6)**

b.  $f(x, y) = x^2y$  untuk  $x \geq 0$   
 $D(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2y \in R\}$  **(skor 6)**  
 $R(f) = \{f(x, y) = x^2y \mid (x, y) \in R^2\}$  **(skor 4)**

2. Fungsi tersebut merupakan fungsi:

- a. Implisit **(skor 10)**
- b. Eksplisit **(skor 10)**
- c. Eksplisit **(skor 10)**

3. Tuliskan contoh fungsi dua peubah, tiga peubah dan lima peubah masing-masing lima.

Contoh fungsi dua peubah ( $x_1, x_2$  peubah bebas dan  $y$  peubah tak bebas): **(skor 10)**

- a.  $y = x_1x_2$
- b.  $y = x_1 + x_2$
- c.  $y = \frac{x_1}{x_2}$

- d.  $y = x_1 - x_2$   
 e.  $y = x_1x_2 + x_1^2$

Contoh fungsi tiga peubah ( $x_1, x_2, x_3$  peubah bebas dan  $y$  peubah tak bebas): **(skor 15)**

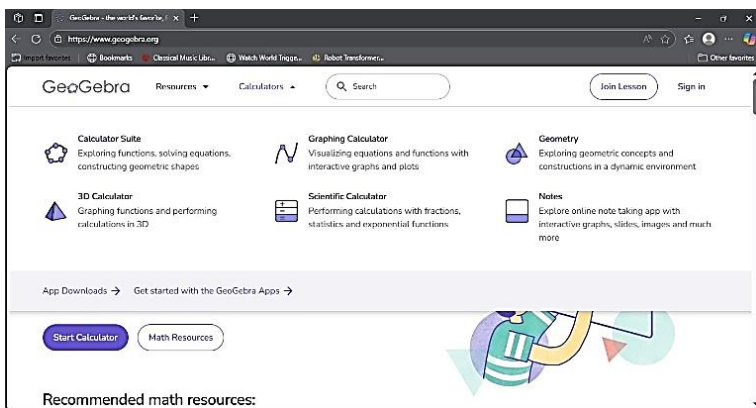
- a.  $y = x_1x_2 - x_3$   
 b.  $y = x_1 + x_2x_3$   
 c.  $y = \frac{x_1}{x_2x_3}$   
 d.  $y = x_1x_3 - x_2$   
 e.  $y = x_1x_2 + x_3^2$

Contoh fungsi lima peubah ( $x_1, x_2, x_3$  peubah bebas dan  $y$  peubah tak bebas): **(skor 15)**

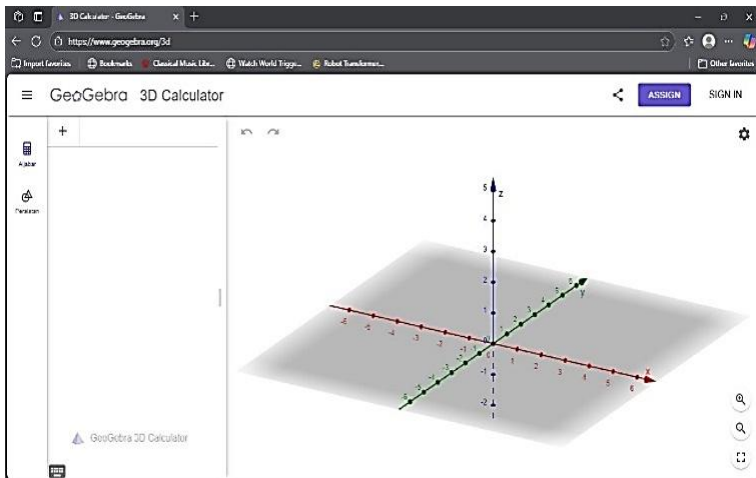
- a.  $x_4y = x_1x_2 - x_3x_5$   
 b.  $y - x_5 = \frac{x_1}{x_4} + x_2x_3$   
 c.  $y = \frac{x_1x_3}{x_2x_4}$   
 d.  $\ln(x_2y) - x_3 = x_1e^{x_4} - x_5$   
 e.  $y = x_1x_2 + x_3^2 - \cos(x_4x_5^2)$

## E. Terapan pada Geogebra

Untuk menggambar Grafik Fungsi 2 Peubah, digunakan *software* Geogebra. Kunjungi *website* geogebra <https://www.geogebra.com>, pilih menu sign up terlebih dahulu, disarankan menggunakan google sebagai cara masuk yang lebih efektif. Selanjutnya, pilih menu Calculators kemudian pilih 3D Calculator.



Setelah memilih menu 3D Calculator, akan muncul tampilan seperti di bawah ini :



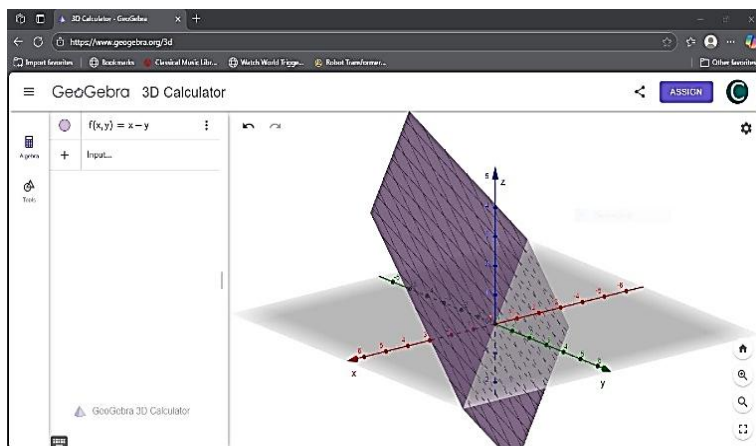
Untuk menggambar grafik fungsi, ketik fungsi pada kotak di bawah ini :

+

Input...

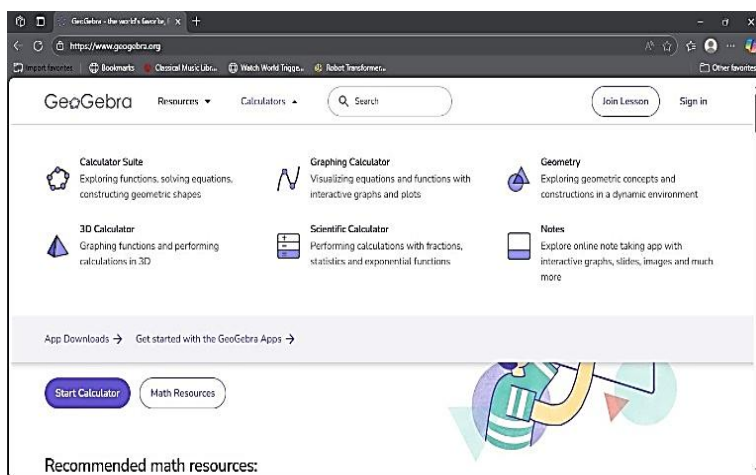
 GeoGebra 3D Calculator

Untuk menggambar fungsi  $f(x,y) = x - y$ , tuliskan fungsi tersebut pada kotak di atas :

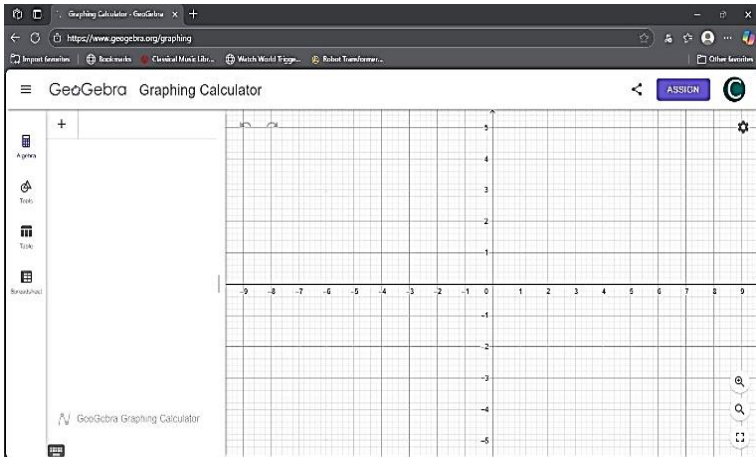


## F. Terapan pada Geogebra (Menggambar Fungsi Implisit)

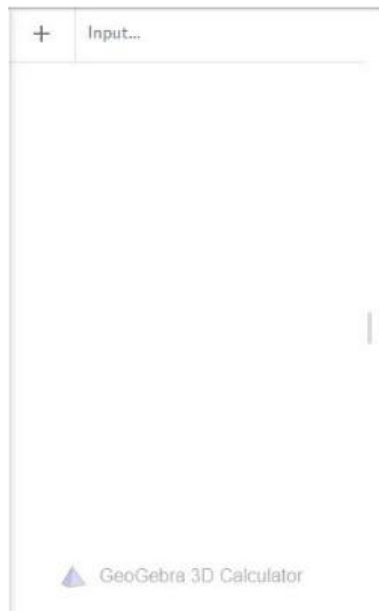
Untuk menggambar Grafik Fungsi Implisit, digunakan *software* Geogebra. Kunjungi *website* geogebra <https://www.geogebra.org>, pilih menu Calculators kemudian pilih Graphing Calculator.



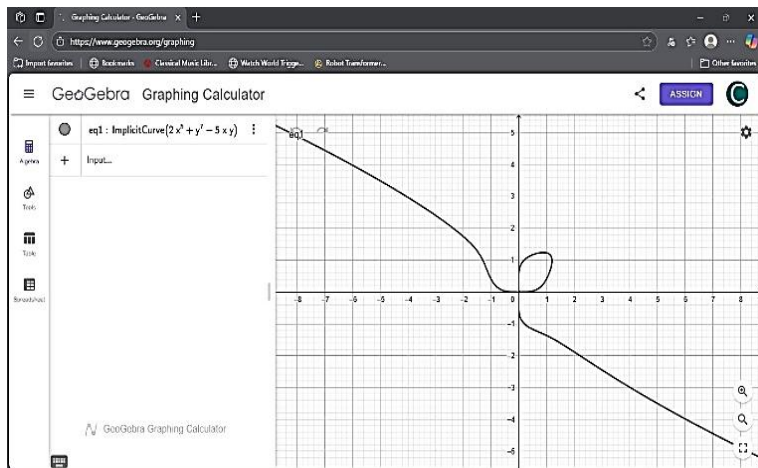
Setelah memilih menu Graphing Calculator, akan muncul tampilan seperti di bawah ini :



Untuk menggambar grafik fungsi, ketik fungsi pada kotak di bawah ini :



Untuk menggambar fungsi  $2x^5 + y^7 = 5xy$ , tuliskan `ImplicitCurve(2x5 + y7 - 5xy)` tersebut pada kotak di atas :



Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.



# BAB 2

## LIMIT DAN KEKONTINUAN

### A. Pendahuluan

Dalam pembahasan mengenai limit dan kekontinuan, pembaca diharapkan dapat memahami serta menjelaskan konsep dan sifat yang berkaitan dengan fungsi dua variabel atau lebih, khususnya terkait kekontinuan dan turunan. Setelah mempelajari bab ini, capaian pembelajaran yang ditargetkan meliputi kemampuan:

1. Menjelaskan konsep limit dan kekontinuan pada fungsi multivariabel;
2. Menghitung limit fungsi dua maupun tiga variabel;
3. Menjelaskan makna kekontinuan suatu fungsi;
4. Menguji kekontinuan fungsi pada titik tertentu.

### B. Materi

#### 1. Limit

Sebelum mempelajari limit pada fungsi dua variabel atau lebih, mari kita ingat kembali konsep limit pada fungsi satu variabel. Kita mengatakan bahwa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  jika nilai limit dari kanan ( $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ) dan dari kiri ( $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ) sama, yaitu  $L$ . Limit kanan hanya memperhatikan nilai  $x$  yang lebih besar dari  $a$ , sedangkan limit kiri hanya memperhatikan nilai  $x$  yang lebih kecil dari  $a$ .

Artinya,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  tercapai apabila  $f(x)$  mendekati  $L$  saat  $x$  menuju  $a$  dari kedua sisi, tanpa harus mengambil nilai  $f(a)$  itu sendiri. Dengan kata lain, ada dua arah pendekatan menuju titik  $x = a$ .

Untuk fungsi dua variabel, konsepnya serupa, hanya saja melibatkan dua variabel sekaligus. Limit fungsi  $f(x, y)$  diperoleh ketika  $x$  mendekati  $a$  dan  $y$  mendekati  $b$ . Penulisan limit dapat dilakukan dalam dua cara:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$$

atau

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$$

Dalam modul ini akan digunakan bentuk kedua. Menentukan limit fungsi dua variabel berarti mencari nilai yang didekati oleh  $f(x, y)$  saat titik  $(x, y)$  mendekati  $(a, b)$ , termasuk ketika titik berada tepat di  $(a, b)$  (Adams & Essex, 2010; Anton et al., 2012; Apostol, 1999; Budhi, 1996; Stewart, 2016).

## 2. Kekontinuan

Topik yang akan dibahas selanjutnya adalah kekontinuan pada fungsi dua variabel. Cobalah untuk mengingat kembali konsep kekontinuan pada fungsi satu variabel. Menurut Anda, syarat apa yang harus dipenuhi agar suatu fungsi satu variabel bersifat kontinu? Mari kita ulas kembali pokok bahasan kalkulus yang telah dipelajari sebelumnya.

Sebuah fungsi  $f$  dikatakan kontinu di titik  $x = a$  apabila ketiga syarat berikut terpenuhi:

1. Nilai  $f(a)$  terdefinisi;
2. Nilai  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada;
3. Nilai limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika salah satu dari ketiga ketentuan di atas tidak terpenuhi, maka fungsi  $f$  disebut tidak kontinu (diskontinu) pada titik  $x = a$ .

Seperti apa pengertian kekontinuan pada fungsi dua variabel? Uraian definisinya disajikan di bawah ini.

Misalkan  $f$  adalah fungsi dua variabel dan  $(a, b)$  suatu titik di  $R^2$ . Fungsi  $f$  disebut kontinu di titik  $(a, b)$  jika memenuhi ketiga syarat berikut:

1.  $f(a, b)$  terdefinisi;
2.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  ada; dan
3.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$

Apabila salah satu dari syarat ini tidak terpenuhi, maka fungsi  $f$  dinyatakan tidak kontinu (diskontinu) di titik  $(a, b)$ .

### Contoh Soal Limit dan Kekontinuan

1. Tentukan nilai dari  $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -2)} \frac{x-2}{xy^2} = \dots$
2. Tentukan nilai dari  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{x} = \dots$

3. Tentukan apakah limit berikut ada atau tidak, jika ada, berapakah nilainya?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} =$$

4. Periksa, apakah  $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$  kontinu di:
- $(1,0)$ ; dan
  - $(0,0)$

**Pembahasan:**

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x-2}{xy^2} = \frac{1-2}{(1)(-2)^2} = -\frac{1}{4}$

2. Sepanjang  $y = mx$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + m^2x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + m^2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sepanjang  $y = 0$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sepanjang  $y^2 = x$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Karena nilai limit sepanjang  $y = mx$  atau  $y = 0$  tidak sama dengan nilai limit sepanjang  $y^2 = x$ , maka

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} \text{ tidak mempunyai limit.}$$

3. Pada soal bagian ini, nilai fungsi tidak kontinu pada titik  $(1, -1)$  karena bila disubstitusikan, penyebut menghasilkan nilai nol. Namun, tidak berarti bahwa nilai limit fungsi ini tidak dapat dikerjakan.

Pada soal ini, kita dapat memfaktorkan baik pembilang maupun penyebutnya seperti berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(3x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(3x-y)}{(x-y)} \end{aligned}$$

Melalui pemfaktoran pembilang dan penyebut serta membagi pembilang dan penyebut dengan faktor yang sama, limit fungsi dapat dicari. Selanjutnya, substitusikan titik  $(1, -1)$  pada fungsi terakhir yang diperoleh.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(3x-y)}{(x-y)} = \frac{4}{2} = 2$$

4. Kita cek semua persyaratan, apakah terpenuhi atau tidak.

a. di  $(1,0)$ ;  $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$

1)  $f(1,0) = \frac{2(1)^2(0)-2}{(1)^2+(0)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2} = \frac{2(1)^2(0)-2}{(1)^2+(0)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2} = f(1,0) = -2$

Jadi,  $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$  **kontinu** di  $(1,0)$

b. di  $(0,0)$ ;  $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$

$f(0,0) = \frac{2(0)^2(0)-2}{(0)^2+(0)^2} = \frac{-2}{0} = \text{tidak terdefinisi}$

Karena salah satu syarat tidak terpenuhi, maka  $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$  **diskontinu** di  $(0,0)$ .

### C. Rangkuman

Definisi kekontinuan pada fungsi satu peubah:

Fungsi  $f$  kontinu di  $x = a$  jika dan hanya jika semua syarat berikut terpenuhi:

1.  $f(a)$  ada;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada; dan
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka  $f$  dikatakan diskontinu atau tidak kontinu di  $x = a$ .

Definisi kekontinuan fungsi dua peubah:

Misalkan  $f$  fungsi dua variabel dan  $(a, b)$  titik di  $R^2$ . Fungsi  $f$  kontinu di titik  $(x_0, y_0)$  jika dan hanya jika semua syarat berikut terpenuhi:

1.  $f(a, b)$  ada;
2.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  ada; dan
3.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka  $f$  dikatakan diskontinu atau tidak kontinu di  $(a, b)$ .

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan nilai limit dari  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$  jika ada. **(skor 25)**
2. Tentukan nilai limit berikut. **(skor 25)**  
 $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} \frac{x^2 - 2xy}{x^2 - 4y^2}$  jika ada.

3. Tunjukkanlah bahwa fungsi  $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$  kontinu pada titik  $(5, -3)$ . **(skor 25)**

4. Jika diberikan  $h(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

Tentukan kontinuitas dari  $h(x, y)$ . **(skor 25)**

**Pembahasan:**

1. Sepanjang  $y = mx$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + m^2x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + m^2x \\ &= 0 \text{ (skor 7)} \end{aligned}$$

Sepanjang  $y = 0$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \\ &= 0 \text{ (skor 6)} \end{aligned}$$

Sepanjang  $y^2 = x$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 \\ &= 1 \text{ (skor 6)} \end{aligned}$$

Karena nilai limit sepanjang  $y = mx$  atau  $y = 0$  tidak sama dengan nilai limit sepanjang  $y^2 = x$ , maka

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$  tidak mempunyai limit. **(skor 6)**

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 2xy}{x^2 - 4y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)} \text{ (skor 7)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x}{(x+2y)} \text{ (skor 6)} \\ &= \frac{2}{(2+2(1))} \text{ (skor 6)} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (skor 6)} \end{aligned}$$

3.  $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$  kontinu pada titik  $(5, -3)$

Pembahasan:

Terdapat 3 kondisi yang harus dipenuhi berdasarkan kekontinuan.

- a.  $f(5, -3)$  ada. **(skor 7)**

Hal ini benar karena domain fungsi  $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$  terdiri dari pasangan-pasangan yang mana penyebutnya tidak nol ( $x + y + 1 \neq 0$ ). Titik  $(5, -3)$  memenuhi kondisi ini. Lebih jauh lagi,

$$f(5, -3) = \frac{3(5)+2(-3)}{5+(-3)+1} = \frac{15-6}{2+1} = 3.$$

- b.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} \frac{3x+2y}{x+y+1}$  ada. **(skor 6)**

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} \frac{3x+2y}{x+y+1} &= \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} 3x+2y}{\lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} x+y+1} \\ &= \frac{15-6}{5-3+1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

- c.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} \frac{3x+2y}{x+y+1} = f(5, -3)$  **(skor 6)**  
 $3 = 3$

Terbukti bahwa  $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$  kontinu pada titik  $(5, -3)$ .  
**(skor 6)**

4. Jika diberikan  $h(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Maka tentukan kontinuitas dari  $h(x, y)$ .

Pembahasan:

Fungsi  $h(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$  merupakan fungsi rasional, fungsi ini kontinu pada setiap domainnya yang dinotasikan sebagai  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$ . **(skor 8)**



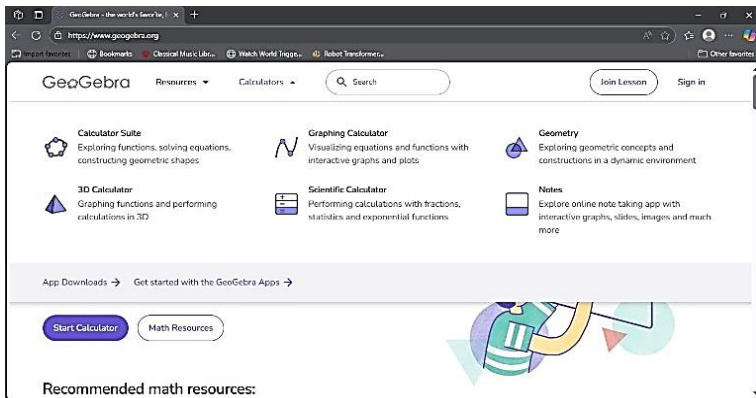
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = h(0,0)$$

(skor 9)

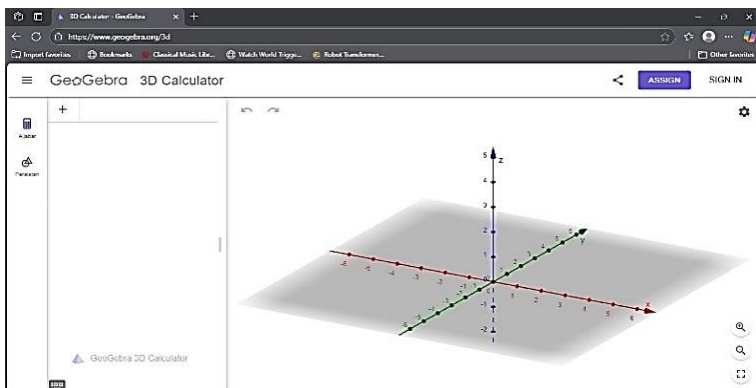
Oleh karenanya,  $h$  juga kontinu di  $(0,0)$  sehingga fungsi  $h(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$  kontinu pada domain  $\mathbb{R}^2$ . (skor 8)

## E. Terapan pada Geogebra (Menentukan Kekontinuan Melalui Grafik)

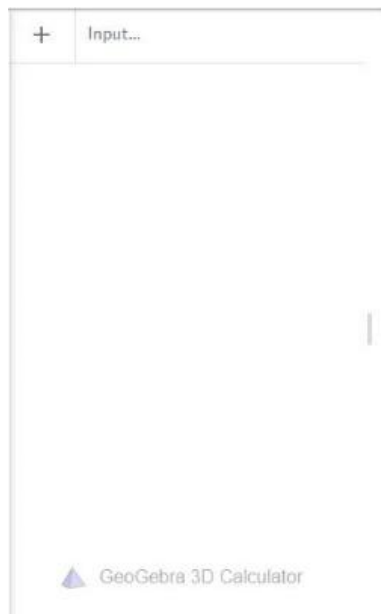
Untuk menentukan kekontinuan Fungsi 2 Peubah, digunakan *software* Geogebra. Kunjungi *website* geogebra <https://www.geogebra.com>, pastikan Anda sudah sign in, pilih menu Calculators kemudian pilih 3D Calculator.



Setelah memilih menu 3D Calculator, akan muncul tampilan seperti di bawah ini :



Untuk menggambar grafik fungsi, ketik fungsi pada kotak dibawah ini :



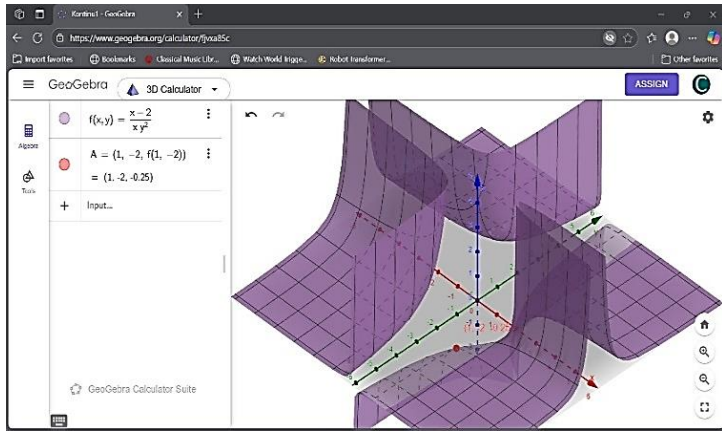
Tunjukkan secara grafik, fungsi  $f(x,y) = \frac{x-2}{xy^2}$  kontinu di titik  $(1,-2)$ . Sesuai syarat kekontinuan, syarat di bawah ini harus dipenuhi :

1.  $f(a,b)$  ada;

$$f(x,y) = \frac{x-2}{xy^2}$$

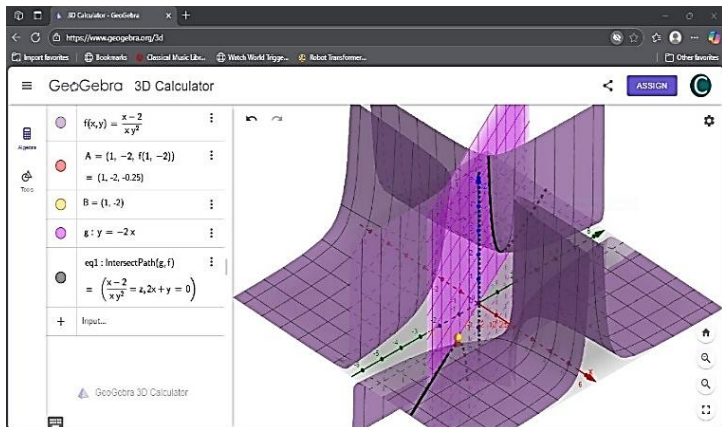
$$f(1,-2) = \frac{1-2}{1(-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

Terbukti  $f(1,-2)$  ada, secara grafik ditunjukkan seperti di bawah ini :

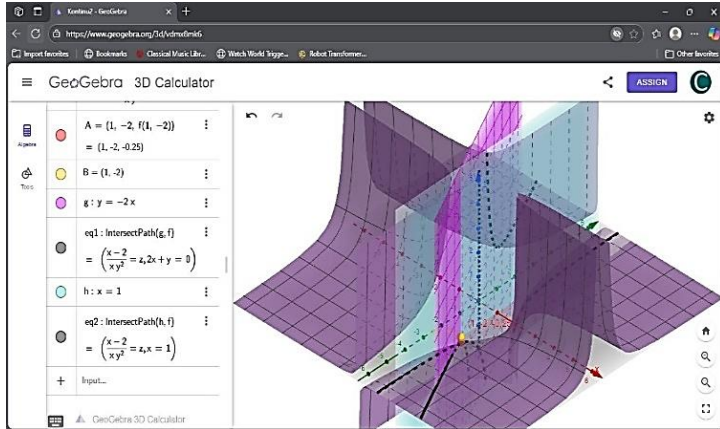


2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  ada

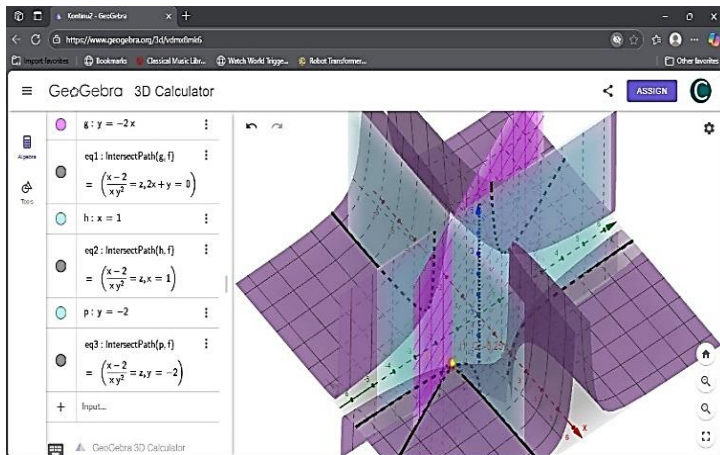
Untuk menunjukkan  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x-2}{xy^2}$  ada, tunjukkan bahwa titik  $(1,-2)$  didekati dari arah manapun menuju ke suatu nilai. Pertama gambar titik  $(1,-2)$ , kemudian gambar beberapa kurva yang melalui titik  $(1,-2)$  dan memotong kurva  $f(x,y) = \frac{x-2}{xy^2}$ , Kurva  $y = -2x$  memotong kurva  $f(x,y) = \frac{x-2}{xy^2}$ , gunakan perintah  $\text{IntersectPath}(\frac{x-2}{xy^2} = z, 2x + y = 0)$  untuk mendapatkan kurva perpotongan.



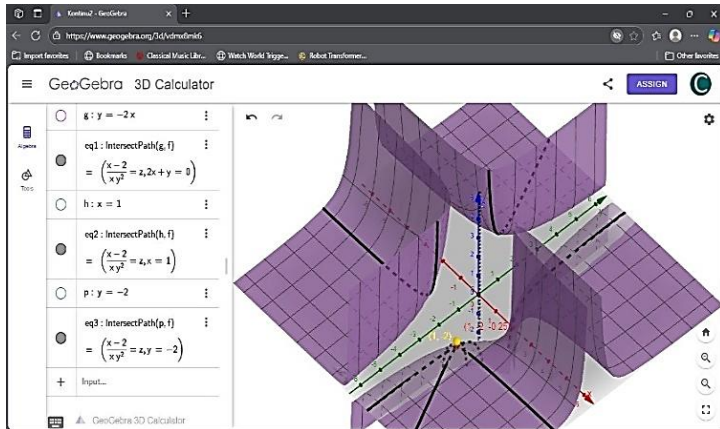
Kurva  $x = 1$  memotong kurva  $f(x, y) = \frac{x-2}{xy^2}$ , gunakan perintah  $\text{IntersectPath}(\frac{x-2}{xy^2} = z, x = 1)$  untuk mendapatkan kurva perpotongan.



Kurva  $y = -2$  memotong kurva  $f(x, y) = \frac{x-2}{xy^2}$ , gunakan perintah  $\text{IntersectPath}(\frac{x-2}{xy^2} = z, y = -2)$  untuk mendapatkan kurva perpotongan.



Dari gambar terlihat bahwa bidang perpotongan (perhatikan garis hitam) saling silang di satu titik  $(1, -2, -\frac{1}{4})$



Hal ini menunjukkan bahwa  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x-2}{xy^2}$  ada dan nilai limit  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x-2}{xy^2} = \frac{1-2}{1(-2)^2} = -\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b) \\
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x-2}{xy^2} = \frac{1-2}{1(-2)^2} = -\frac{1}{4} \\
 & f(x,y) = \frac{x-2}{xy^2} \\
 & f(1,-2) = \frac{1-2}{1(-2)^2} = -\frac{1}{4} \\
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} f(x,y) = f(1,-2)
 \end{aligned}$$

Dengan terpenuhinya syarat kekontinuan, maka diambil kesimpulan fungsi  $f(x,y) = \frac{x-2}{xy^2}$  kontinu di titik  $(1,-2)$ .

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB

# 3

## DERIVATIF PARSIAL

### A. Pendahuluan

Bab ini membahas mengenai derivatif parsial pada fungsi peubah banyak, khususnya fungsi yang memiliki dua peubah bebas. Untuk memahami materi ini dengan baik, pembaca diharapkan telah menguasai konsep dasar turunan yang telah dipelajari dan dirangkum pada mata kuliah Kalkulus sebelumnya. Kompetensi yang diharapkan setelah mempelajari materi ini adalah kemampuan dalam menentukan derivatif parsial pada fungsi peubah banyak. Oleh karena itu, penting untuk memahami pengertian serta konsep-konsep yang berkaitan dengan derivatif parsial, sekaligus melatih keterampilan melalui penyelesaian berbagai soal. Capaian pembelajaran khusus yang ingin dicapai melalui bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan konsep derivatif parsial.
2. Mampu menentukan turunan pada fungsi peubah banyak.

### B. Materi

#### 1. Turunan Parsial

Derivatif parsial merupakan derivatif dari suatu fungsi yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas, dengan melakukan diferensiasi terhadap salah satu variabel sementara variabel lain dianggap konstan (Muzakir, 2018; Weir et al., 2014).

## Notasi

Misalkan  $f(x, y)$  adalah fungsi dengan dua peubah bebas  $x$  dan  $y$ .

Derivatif parsial  $f(x, y)$  terhadap  $x$  direpresentasikan sebagai  $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k, y) - f(x, y)}{k}$  sedangkan derivatif parsial  $f(x, y)$  terhadap  $y$  direpresentasikan dengan  $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$

Derivatif parsial orde dua dari  $f(x, y)$  dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{aligned}$$

## Lemma Dasar

Jika  $z = f(x, y)$  mempunyai derivatif parsial pertama yang kontinu di *region*  $D$ , maka fungsi tersebut mempunyai diferensial total, yaitu

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Secara umum, jika  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  adalah fungsi bernilai real, maka diferensial totalnya dituliskan sebagai:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Untuk dua fungsi  $u = u(x, y)$  dan  $v = v(x, y)$  masing-masing terdefinisi dan mempunyai derivatif parsial terhadap  $x$  maupun  $y$  pada suatu daerah  $D \subset \mathbb{R}^2$  maka berlaku sifat-sifat berikut:

- $d(u + v) = du + dv$
- $d(uv) = u dv + v du$



- c. Untuk setiap  $(x, y) \in D$ ,  $v(x, y) \neq 0$ , maka berlaku

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

- d.  $df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$

$$df(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

**Contoh Soal Derivatif Parsial:**

- a. Diberikan fungsi  $f(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y$ . Tentukan derivatif parsial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- b. Diberikan fungsi  $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + e^{xz}$ , tentukan derivatif parsial orde dua fungsi  $f$ .
- c. Diketahui:  $z = x^2y + y^3$ . Tentukan  $dz$

**Pembahasan:**

- a. Derivatif Parsial terhadap  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2) = 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-y) = 0$$

Sehingga:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

- b. Derivatif Parsial terhadap  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2) = 6xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-y) = -1$$

Sehingga:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy - 1$$

- c. Diperoleh  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ze^{xz}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2yz + xe^{xz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + ze^{xz}) = 2y + z^2 e^{xz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + z^2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (2yz + xe^{xz}) = 2y + x^2 e^{xz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + ze^{xz}) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (2xy + ze^{xz}) = e^{xz} + xze^{xz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + z^2) = 2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = (2xy)dx + (x^2 + 3y^2)dy$$

### C. Rangkuman

Derivatif parsial adalah derivatif dari suatu fungsi yang memiliki beberapa variabel bebas terhadap salah satu variabel bebasnya dengan memandang variabel bebas lainnya sebagai konstanta.

Derivatif parsial orde dua dari  $f(x, y)$  disimbolkan dengan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

#### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y}$  jika diberikan  $f(x, y) = x^2 + 2y$ . **(skor 10)**
2. Jika  $z^3 - xz - y = 0$  maka tentukan  $\frac{\partial z}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . **(skor 20)**
3. Diberikan  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ .  
Tentukan  $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ . **(skor 40)**
4. Tentukan  $\frac{\partial U}{\partial x}$  dari fungsi  $U = \frac{9y^2}{x-y}$ . **(skor 10)**
5. Tentukan  $\frac{\partial f}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y}$  jika diberikan  
 $f(x, y) = (2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{5}{2}} - xy^2$ . **(skor 20)**

#### Pembahasan:

1. Jika  $f(x, y) = x^2 + 2y$  maka  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$  dan  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ . **(skor 10)**

2. Jika  $z^3 - xz - y = 0$  maka  $\frac{\partial z^3}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - (z + x \frac{\partial z}{\partial x}) - 0 = 0$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - z - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 - x) = z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2 - x} \text{ (skor 10)}$$

$$\frac{\partial z^3}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial y} = 0$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - (0 + x \frac{\partial z}{\partial y}) - 1 = 0$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 - x) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3z^2 - x} \text{ (skor 10)}$$

3. Jika  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  maka

$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)(2x) \rightarrow 2x$  merupakan turunan dari  $x^2 + y^2 + z^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Misal:

$$u = x \rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 1$$

$$v = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow v' = \frac{dv}{dx} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Saya ulangi,

$2x$  merupakan turunan terhadap  $x$  dari  $(x^2 + y^2 + z^2)$  .....(Lihat dalil tentang aturan berantai)

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(1) + x\left(-\frac{1}{2}\right) \left(2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ (skor 10)}$$

Silahkan coba sendiri untuk turunan selanjutnya...benarkah hasilnya sama dengan berikut ini?

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)(2y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + y\left(-\frac{1}{2}\right) \left(2y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ (skor 10)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)(2z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z\left(-\frac{1}{2}\right) \left(2z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ (skor 10)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &\quad + \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &\quad + \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \\ &= 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \\
& = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(3 - (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}) \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(3 - 1) \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2) \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\
& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \text{ (skor 10)}
\end{aligned}$$

4. Jika  $U = \frac{9y^2}{x-y}$  maka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= (-1)9y^2(x-y)^{-2}(-1) \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{-9y^2}{(x-y)^2} \\
&\text{(skor 10)}
\end{aligned}$$

5. Jika  $f(x, y) = (2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{5}{2}} - xy^2$
- $$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \left[ \frac{5}{2}(2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}(-2x) \right] - y^2 \\
&= \left[ -5x(2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}} \right] - y^2 \text{ (skor 10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \left[ \frac{5}{2}(2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}(-4y) \right] - 2xy \\
&= \left[ -10y(2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}} \right] - 2xy \text{ (skor 10)}
\end{aligned}$$

## E. Terapan pada Geogebra

Langkah-langkah membuat visualisasi Derivatif Parsial di GeoGebra:

### 1. Buka GeoGebra 3D Calculator

### 2. Masukkan Fungsi Permukaan

Di kolom "input" kiri bawah, ketik:

$$f(x, y) = x^2 y + y^3$$

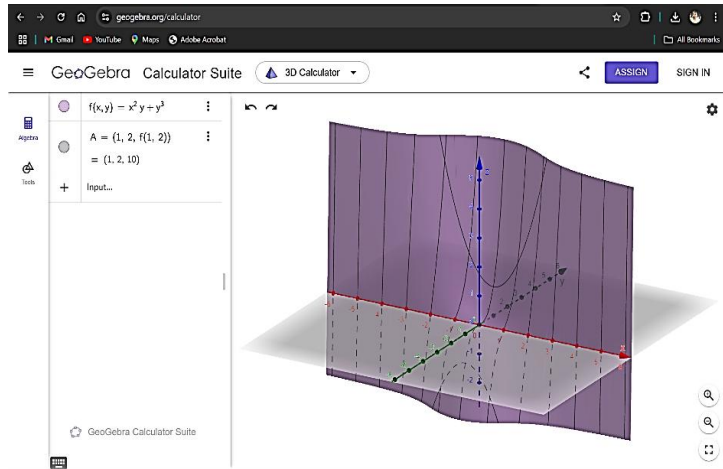
GeoGebra akan menampilkan permukaan 3D.

### 3. Tambahkan Titik Evaluasi

Kita ambil titik (1,2), dan masukkan:

$$A = (1, 2, f(1, 2))$$

Titik ini akan muncul di permukaan.

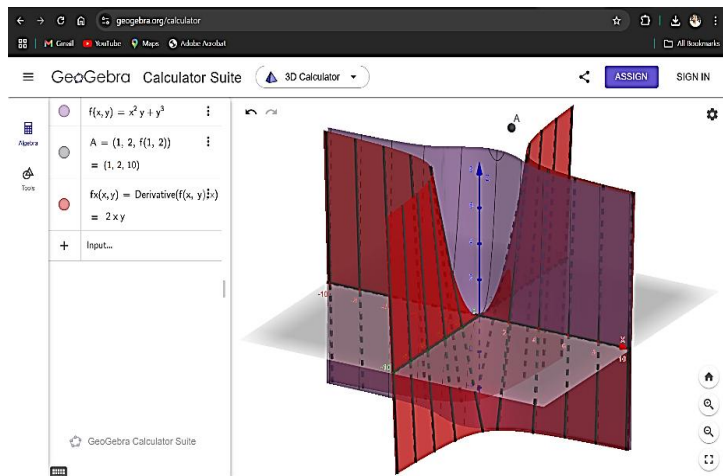


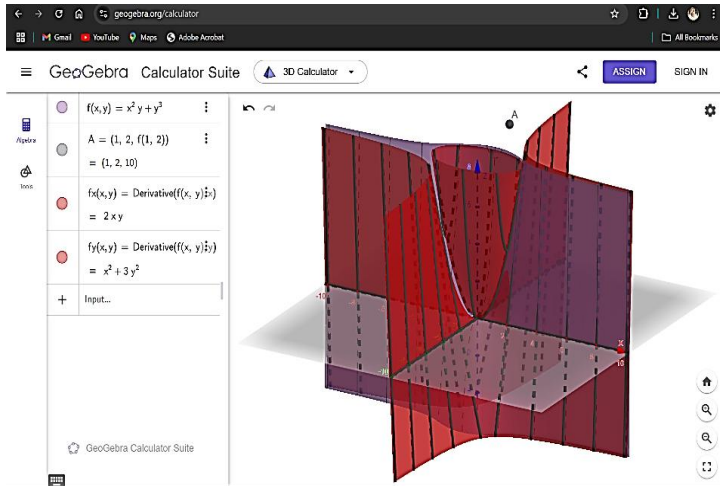
### 4. Hitung Turunan Parsial

Masukkan turunan parsial terhadap x dan y:

$$f_x(x, y) = \text{Derivative}(f(x, y), x)$$

$$f_y(x, y) = \text{Derivative}(f(x, y), y)$$





5. Lanjutkan evaluasi turunan di titik (1,2):

6. Tampilkan Vektor Gradien

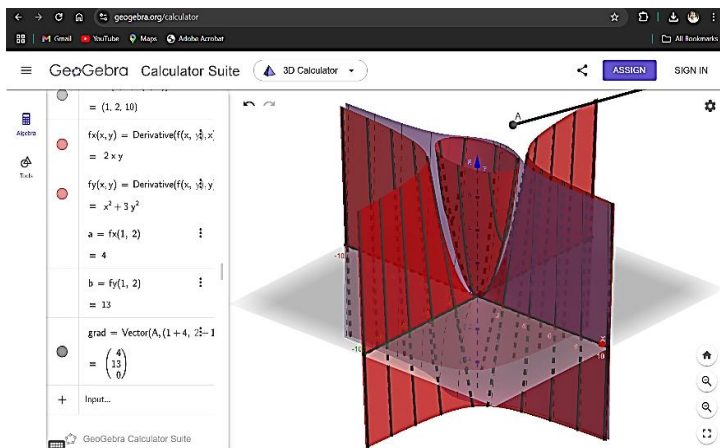
Vektor gradien di bidang xy adalah (4,13). Untuk memvisualisasikannya dari titik A, masukkan:

$$\text{grad} = \text{Vector}(A, (1 + 4, 2 + 13, f(1, 2)))$$

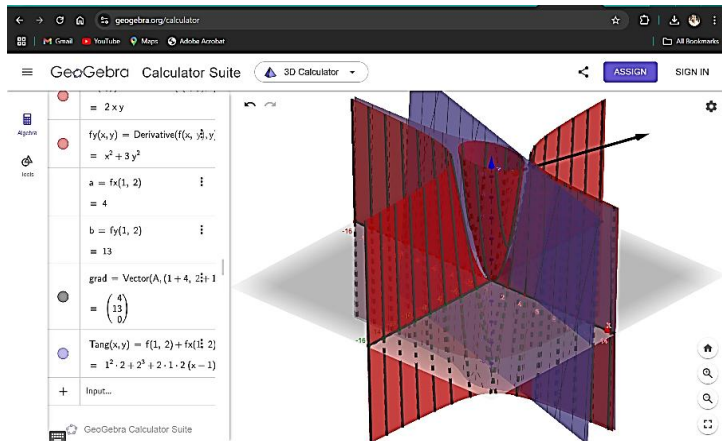
atau bisa ditulis:

$$\text{grad} = \text{Vector}(A, (5, 15, f(1, 2)))$$

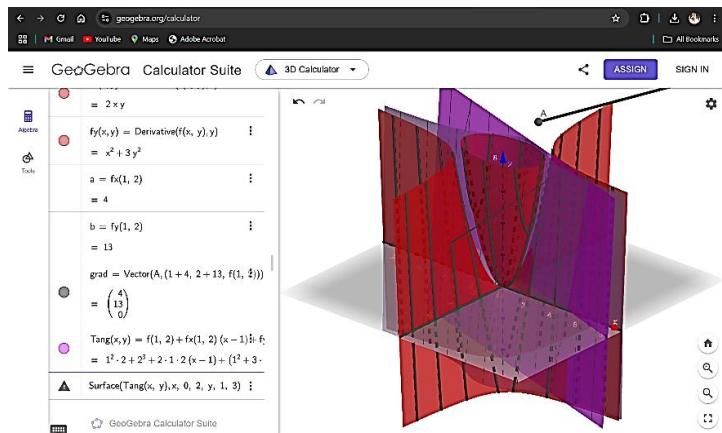
GeoGebra akan menampilkan vektor yang menunjukkan arah perubahan maksimum fungsi (gradien).



## 7. (Opsional) Tambahkan Bidang Singgung



## 8. Kemudian tampilkan: Surface (Tang(x, y), x, 0, 2, y, 1, 3)





Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB

# 4

## DERIVATIF FUNGSI IMPLISIT

### A. Pendahuluan

Dalam pembahasan mengenai turunan fungsi implisit, pembaca diharapkan dapat memahami serta menjelaskan konsep dan sifat-sifat yang berkaitan dengan turunan dari fungsi implisit. Setelah mempelajari bab ini, tujuan pembelajaran khusus yang diharapkan tercapai meliputi kemampuan untuk:

1. Menjelaskan konsep dasar turunan fungsi implisit;
2. Menghitung turunan dari fungsi implisit;
3. Menghitung turunan fungsi implisit dengan metode Determinan Jacobian.

### B. Materi

#### 1. Derivatif Fungsi Implisit

Fungsi  $z = f(x, y)$  dapat direpresentasikan dalam bentuk  $F(x, y, z) = 0$ . Bentuk  $F(x, y, z) = 0$  disebut sebagai fungsi implisit (Marsden & Tromba, 2012; Purcell & Varberg, 1987).

Derivatif fungsi implisit  $z$  terhadap peubah  $x$  dan  $y$  dapat ditentukan dengan rumus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}}$$

Sebagai contoh, persamaan  $x^3 + 3y^2 - 2z^2 = 5$  dapat ditulis secara implisit menjadi  $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 - 2z^2 - 5 = 0$ .

Derivatif parsial dari  $F(x, y, z)$  adalah

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 3x^2 \quad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = -4z$$

Dengan demikian, turunan  $F(x, y, z)$  terhadap  $x$  dan  $y$  diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}} = -\frac{3x^2}{-4z} = \frac{3x^2}{4z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}} = -\frac{6y}{-4z} = \frac{3y}{2z}$$

## 2. Determinan Jacobian

Konsep Jacobian banyak digunakan dalam perhitungan turunan fungsi-fungsi implisit (Marsden & Tromba, 2012; Purcell & Varberg, 1987).

Untuk dua fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

Jacobian terhadap peubah  $x$  dan  $y$  ditentukan dengan rumus

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

Nilai  $J$  disebut determinan Jacobian derajat dua dari fungsi  $F$  dan  $G$ . Selanjutnya, untuk tiga fungsi implisit  $F(x, y, z) = 0$ ,  $G(x, y, z) = 0$ , dan  $H(x, y, z) = 0$ , Jacobian terhadap  $x$ ,  $y$  dan  $z$  dinyatakan dengan

$$J = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Yang disebut determinan Jacobian derajat tiga dari fungsi  $F$ ,  $G$  dan  $H$ .

### Contoh Soal Derivatif Fungsi Implisit:

- a. Jika diberikan fungsi  $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$  maka

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} =$$

- b. Jika diberikan sistem fungsi implisit:

$$F(x, y, u, v) = xu - yv \sin(xy) = 0$$

$$G(x, y, u, v) = x^2 u^2 + y^2 v^2 - x^2 y^2 = 0$$

$$\text{tentukan } \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \dots$$

- c. Diberikan dua fungsi:

$$F(x, y) = \ln(xy) \text{ dan } G(x, y) = x^2 - y^2. \text{ Tentukan } \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \dots$$

### Pembahasan:

- a. Diberikan  $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$

Misalkan

$$N = y^2 - x^2, M = y^2 + x^2.$$

$$N_x = -2x$$

$$N_y = 2y$$

$$M_x = 2x$$

$$M_y = 2y$$

Dengan aturan hasil bagi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{N_x M - N M_x}{M^2} \\ &= \frac{(-2x)(M) - (N)(2x)}{M^2} \\ &= \frac{-2x(M+N)}{M^2} \\ &= \frac{-2x((y^2+x^2)+(y^2-x^2))}{M^2} = \frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{N_y M - N M_y}{M^2} \\
&= \frac{(2y)(M) - (N)(2y)}{M^2} \\
&= \frac{2y(M-N)}{M^2} \\
&= \frac{2y((y^2+x^2)-(y^2-x^2))}{M^2} = \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x \frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

b. Disajikan pada soal:

$$F(x, y, u, v) = xu - yv \sin(xy) = 0,$$

$$G(x, y, u, v) = x^2u^2 + y^2v^2 - x^2y^2 = 0$$

Turunan parsial:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x, \frac{\partial F}{\partial v} = -y \sin(xy)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2x^2u, \frac{\partial G}{\partial v} = 2y^2v$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & -y \sin(xy) \\ 2x^2u & 2y^2v \end{vmatrix} \\
&= x(2y^2v) - 2x^2u(-y \sin(xy)) \\
&= 2xy^2v + 2x^2yu \sin(xy) \\
&= 2xy(yv + xu \sin(xy))
\end{aligned}$$

c. Jika  $F(x, y) = \ln(xy)$  dan  $G(x, y) = x^2 - y^2$

Hitung turunan parsial:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 2x; \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = -2y.$$

$$\begin{aligned}
 J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ 2x & -2y \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{x}\right)(-2y) - \left(\frac{1}{y}\right)(2x) \\
 &= \frac{-2y}{x} - \frac{2x}{y}
 \end{aligned}$$

### C. Rangkuman

Jika terdapat dua fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

maka Jacobian kedua fungsi tersebut terhadap peubah  $x$  dan  $y$  dinyatakan sebagai

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

Jika diberikan tiga fungsi implisit

$$F(x, y, z) = 0$$

$$G(x, y, z) = 0$$

$$H(x, y, z) = 0$$

maka Jacobian dari ketiga fungsi tersebut terhadap peubah  $x, y$  dan  $z$  dinyatakan sebagai

$$J = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

#### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan  $\frac{\partial z}{\partial x}$  dari  $x^2 + 2xy + z^2 - xz + 2 = 0$ . (skor 30)
2. Berapakah nilai Determinan Jacobian dari sistem persamaan  $f(x, y) = -y^2 + x^2$ ,  $g(x, y) = 3y^2 - x$ . (skor 30)
3. Tentukan determinan jacobian jika diketahui  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . (skor 40)

#### Pembahasan:

1. Persamaan implisit:  $x^2 + 2xy + z^2 - xz + 2 = 0$ , diminta menentukan turunan parsial  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

Karena  $z$  tidak diekspresikan secara eksplisit sebagai fungsi dari  $x$  dan  $y$ , kita gunakan **diferensiasi implisit** terhadap  $x$ , dengan menganggap bahwa  $z = z(x, y)$ .

Ambil turunan terhadap  $x$  dari kedua sisi:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(z^2) - \frac{d}{dx}(xz) + \frac{d}{dx}(2) = \frac{d}{dx}(0)$$

Hitung tiap turunan:

- a.  $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
- b.  $\frac{d}{dx}(2xy) = 2y$  (karena  $y$  dianggap konstan terhadap  $x$ )
- c.  $\frac{d}{dx}(z^2) = 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
- d.  $\frac{d}{dx}(xz) = z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
- e.  $\frac{d}{dx}(2) = 0$

(skor 20)

Substitusikan semuanya:

$$2x + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - z - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Gabungkan dan kelompokkan suku-suku:

$$(2z - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (2x + 2y - z) = 0$$

Pindahkan  $2x + 2y - z$  ke kanan:

$$(2z - x) \frac{\partial z}{\partial x} = z - 2x - 2y$$

Akhirnya, kita peroleh:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - 2x - 2y}{2z - x}$$

(skor 10)

**Jawaban akhir:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - 2x - 2y}{2z - x}$$

2. Diberikan sistem fungsi:

$$f(x, y) = -y^2 + x^2, g(x, y) = 3y^2 - x$$

Kita ingin mencari **determinan Jacobian**, yaitu determinan dari matriks turunan parsial dari f dan g terhadap x dan y.

Langkah 1: Bentuk Matriks Jacobian

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Hitung turunan parsial:

a.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

b.  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

c.  $\frac{\partial g}{\partial x} = -1$

d.  $\frac{\partial g}{\partial y} = 6y$

(skor 20)

Jadi:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ -1 & 6y \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Hitung Determinan

$$\begin{aligned} \det(J) &= (2x)(6y) - (-2y)(-1) = 12xy - 2y \\ &= 2y(6x - 1) \end{aligned}$$

(skor 10)

**Jawaban akhir:**

$$\det(J) = 2y(6x - 1)$$



3. Kita diberikan transformasi koordinat dari koordinat polar ke kartesian:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

Kita diminta menentukan **determinan Jacobian** dari transformasi ini, yaitu:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

**Langkah 1: Hitung Turunan Parsial**

- a.  $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$
- b.  $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$
- c.  $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$
- d.  $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$

(skor 20)

Jadi matriks Jacobian-nya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

(skor 10)

**Langkah 2: Hitung Determinan**

$$\begin{aligned} \det(J) &= (\cos \theta)(r \cos \theta) - (-r \sin \theta)(\sin \theta) = r \\ &= r \cos 2\theta + r \sin 2\theta = r(\cos 2\theta + \sin 2\theta) \end{aligned}$$

(skor 10)

**Jawaban akhir:**

$$\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right) = r$$

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB

# 5

## NILAI EKSTRIM BERSYARAT

### A. Pendahuluan

Pada sesi ini, kita akan membahas tentang nilai ekstrim fungsi peubah banyak dan nilai ekstrim bersyarat untuk fungsi peubah banyak. Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan sifat-sifat fungsi komposit untuk fungsi peubah banyak serta memahami pengertian nilai ekstrim dan nilai ekstrim bersyarat untuk fungsi peubah banyak.

Capaian pembelajaran khusus setelah Anda mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian nilai ekstrim fungsi peubah banyak;
2. Terampil menentukan nilai ekstrim fungsi peubah banyak.

### B. Materi

#### 1. Nilai Ekstrim Bersyarat

Pada bagian ini akan dikaji konsep fungsi maksimum dan minimum. Istilah **ekstrem** digunakan untuk menggambarkan keadaan fungsi ketika mencapai titik maksimum maupun titik minimum.

Pengertian ekstrem relatif pada fungsi dua variabel sama halnya dengan yang berlaku pada fungsi satu variabel. Misalkan  $f(x,y)$  didefinisikan pada suatu daerah  $\mathfrak{R}$  pada bidang  $xoy$  dengan  $(a,b) \in \mathfrak{R}$ .

- a. Fungsi  $f(x, y)$  dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif  $f(a, b)$  di titik  $(a, b)$  jika terdapat bilangan real  $\delta > 0$  sehingga untuk setiap titik  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  yang memenuhi

$$\sqrt{(x - a)^2 - (y - b)^2} < \delta$$

berlaku  $f(x, y) \leq f(a, b)$

- b. Fungsi  $f(x, y)$  dikatakan mempunyai nilai minimum relatif  $f(a, b)$  di titik  $(a, b)$  jika terdapat bilangan real  $\delta > 0$  sehingga untuk setiap titik  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  yang memenuhi

$$\sqrt{(x - a)^2 - (y - b)^2} < \delta$$

berlaku  $f(x, y) \geq f(a, b)$

- c. Fungsi  $f(x, y)$  dikatakan mempunyai nilai maksimum absolut  $f(a, b)$  di titik  $(a, b)$  pada  $\mathfrak{R}$  jika untuk setiap titik  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  berlaku  $f(x, y) \leq f(a, b)$ .
- d. Fungsi  $f(x, y)$  dikatakan mempunyai nilai minimum absolut  $f(a, b)$  di titik  $(a, b)$  pada  $\mathfrak{R}$  jika untuk setiap titik  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  berlaku  $f(x, y) \geq f(a, b)$ .

$f(x, y)$  terdefinisi dan terdiferensial parsial hingga orde dua pada daerah  $\mathfrak{R}$ , akan mencapai nilai ekstrim di titik  $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$  jika

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

dan  $D = B^2 - AC$  dan

1. mencapai nilai maksimum relatif jika  $A < 0$  dan  $D > 0$
2. mencapai nilai minimum relatif jika  $A > 0$  dan  $D > 0$

$f(x, y)$  bukan nilai ekstrim, jika  $D < 0$  atau jika  $D = 0$  maka uji turunan kedua ini tidak menghasilkan keputusan.

dengan  $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ , dan  $C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$

(Anton et al., 2012; Stewart, 2016)

Contoh soal nilai ekstrim bersyarat:

- Diberikan fungsi  $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6x + 4y$ . Tentukan titik stasioner fungsi  $f$  dan tinjau apakah fungsi  $f$  mencapai nilai ekstrim di titik tersebut.
- Tentukan nilai ekstrim fungsi  $f$  jika ada untuk  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y$

Pembahasan:

- Untuk menentukan titik stasioner diselesaikan sistem persamaan

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 6x - 6 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 2y + 4\end{aligned}$$

Jadi

$$6x - 6 = 0$$

$$2y + 4 = 0$$

Sistem persamaan di atas mempunyai penyelesaian  $x = 1$  dan  $y = -2$ , sehingga titik  $(1, -2)$  merupakan titik stasioner fungsi  $f$  di atas.

Selanjutnya dibandingkan nilai fungsi  $f(x, y)$  di titik  $(1, -2)$  dengan nilai fungsi tersebut di titik  $(1 + h, -2 + k)$  dengan  $h$  dan  $k$  bilangan real sebarang cukup kecil.

$$f(1, -2) = -7$$

$$\begin{aligned}f(1 + h, -2 + k) &= 3(1 + h)^2 + (-2 + k)^2 - 6(1 + h) \\ &\quad + 4(-2 + k)\end{aligned}$$

$$= 3h^2 + k^2 - 11$$

$$\begin{aligned}f(1 + h, -2 + k) - f(1, -2) &= (3h^2 + k^2 - 11) + 7 \\ &= 3h^2 + k^2 - 4\end{aligned}$$

Terlihat bahwa tanda dari  $[f(1+h, -2+k) - f(1, -2)]$  dapat berubah dengan perubahan nilai  $h$  dan  $k$ , berarti fungsi  $f(x, y)$  tidak mencapai nilai ekstrim di titik stasioner  $(1, -2)$ .

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 8x - 8 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 2y + 4 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= 8 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= 2 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \text{ maka} \end{aligned}$$

$8x - 8 = 0$  dan  $2y + 4 = 0$  memiliki penyelesaian  $x = 1$ ,  $y = -2$  diperoleh titik stasioner fungsi  $f(x, y)$  yaitu titik  $(1, -2)$  selanjutnya dihitung nilai diskriminan  $D = B^2 - AC = 0 - 16 = -16 < 0$

Karena  $A = \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x^2} = 8 > 0$  maka di titik stasioner  $(1, -2)$  fungsi  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y$  mencapai nilai minimum relatif sebesar

$$f(1, -2) = 4(1)^2 + (-2)^2 - 8(1) + 4(-2) = -8$$

### C. Rangkuman

$f(x, y)$  terdefinisi dan terdiferensial parsial hingga orde dua pada daerah  $\mathfrak{R}$ , akan mencapai nilai ekstrim di titik  $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$  jika

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

dan  $D = B^2 - AC$  dan

1. jika  $A < 0$  dan  $D > 0$  maka fungsi mencapai nilai maksimum relatif di  $(x_0, y_0)$ .
2. jika  $A > 0$  dan  $D > 0$  maka fungsi mencapai nilai minimum relatif di  $(x_0, y_0)$ .
3. jika  $D < 0$  maka  $(x_0, y_0)$  merupakan titik pelana.
4. jika  $D = 0$  maka  $(x_0, y_0)$  mungkin merupakan sebuah maksimum relatif, maksimum relatif atau titik pelana. Perlu teknik lain untuk menentukan jenis titik kritis.

$$\text{dengan } A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \text{ dan } C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Diberikan fungsi  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$ . Tentukan titik stasioner fungsi  $f$  dan tinjau apakah fungsi  $f$  mencapai nilai ekstrim di titik tersebut. **(skor 25)**
2. Diberikan fungsi  $f(x, y) = -xy + 2x + y^2 + y + 1$ . Tentukan titik stasioner fungsi  $f$  dan tinjau apakah fungsi  $f$  mencapai nilai ekstrim di titik tersebut. **(skor 25)**
3. Tentukan nilai ekstrim fungsi  $f$  jika ada untuk  $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y$ . **(skor 25)**
4. Tentukan nilai ekstrim fungsi  $f$  jika ada untuk  $f(x, y) = \cos x \sin y$ . **(skor 25)**

**Pembahasan:**

1. Kita akan mencari titik stasioner dari fungsi  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$  dan menentukan apakah titik tersebut merupakan titik ekstrem maksimum, minimum, atau saddle point.

**Langkah 1: Cari titik stasioner**

Titik stasioner terjadi ketika turunan parsial pertama dari fungsi terhadap masing-masing variabel sama dengan nol. Kita hitung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 6x - 2y \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -2x + 2y - 8\end{aligned}$$

(skor 5)

Setarakan keduanya ke nol:

$$\begin{aligned}6x - 2y &= 0 \quad (1) \\ -2x + 2y - 8 &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

(skor 2)

**Langkah 2: Selesaikan sistem persamaan**

Dari persamaan (1):

$$6x = 2y \Rightarrow y = 3x$$

(skor 2)

Substitusi ke persamaan (2):

$$\begin{aligned}-2x + 2(3x) - 8 &= 0 \Rightarrow -2x + 6x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \\ &\Rightarrow x = 2 \\ y &= 3x = 6\end{aligned}$$

(skor 3)

Jadi, titik stasioner adalah (2,6). (skor 1)

**Langkah 3: Uji nilai ekstrim**

Hitung turunan kedua:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6, f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2, f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -2$$

(skor 5)



Hitung determinan matriks:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6)(2) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8$$

(**skor 4**)

Karena  $D > 0$  dan  $f_{xx} > 0$ , maka titik (2,6) adalah titik minimum lokal. (**skor 3**)

**Jawaban Akhir:**

Fungsi  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$  memiliki **titik stasioner** di (2, 6), dan fungsi mencapai **minimum lokal** di titik tersebut.

2. Kita diberi fungsi:

$$f(x, y) = -xy + 2x + y^2 + y + 1$$

**Langkah 1: Turunan Parsial Pertama**

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y + 2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + 2y + 1$$

Setarakan keduanya ke nol:

$$-y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad (1)$$

$$-x + 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

Substitusi (1) ke (2):

$$-x + 2(2) + 1 = 0 \Rightarrow -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Jadi titik stasioner (5,2)

(**skor 15**)

**Langkah 2: Uji Jenis Titik**

Hitung turunan kedua:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0, f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2, f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -1$$

Determinannya:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (0)(2) - (-1)^2 = 0 - 1 = -1$$

Karena  $D > 0$  dan  $f_{xx} > 0$ , maka titik tersebut adalah minimum lokal.

(skor 10)

**Jawaban Akhir:**

Karena  $D < 0$ , maka titik stasioner **(5,2)** adalah titik sadel, bukan titik ekstrim (minimum atau maksimum lokal).

3. Alternatif jawaban 1:

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y - 2x + 4$$

(skor 5)

$$A = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -2$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2$$

(skor 5)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \text{ maka}$$

$$6x - 2y = 0 \text{ dan } 2y - 2x + 4 = 0$$

memiliki penyelesaian  $x = -1, y = -3$

diperoleh titik stasioner fungsi  $f(x, y)$  yaitu titik  $(-1, -3)$ .

(skor 5)

selanjutnya dihitung nilai diskriminan

$$D = B^2 - AC = (-2)^2 - (6)(2) = 4 - 12 = -8 < 0. \text{ (skor 5)}$$

$$\text{Karena } A = \frac{\partial^2 f(-1, -3)}{\partial x^2} = 6 > 0$$

maka di titik stasioner  $(-1, -3)$  fungsi  $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y$  mencapai nilai minimum relatif sebesar

$$\begin{aligned} f(-1, -3) &= 3(-1)^2 + (-3)^2 - 2(-1)(-3) + 4(-3) = \\ &= 3 + 9 - 6 - 12 = -6 \end{aligned}$$

(skor 5)

Alternatif jawaban 2:

Untuk menentukan titik *stasioner* diselesaikan sistem persamaan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 6x - 2y \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y - 2x + 4\end{aligned}$$

Jadi

$$6x - 2y = 0$$

$$2y - 2x + 4 = 0$$

Sedemikian sehingga  $x = -1, y = -3$

Diperoleh titik stasioner fungsi  $f(x, y)$  yaitu titik  $(-1, -3)$ .

Selanjutnya dibandingkan nilai fungsi  $f(x, y)$  di titik  $(-1, -3)$  dengan nilai fungsi tersebut di titik  $(-1 + h, -3 + k)$  dengan  $h$  dan  $k$  sebarang bilangan real cukup kecil.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y \\ f(-1, -3) &= 3(-1)^2 + (-3)^2 - 2(-1)(-3) + 4(-3) \\ &= 3 + 9 - 6 - 12 = -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(-1 + h, -3 + k) &= \\ &= 3(-1 + h)^2 + (-3 + k)^2 - 2(-1 + h)(-3 + k) + 4(-3 + k) \\ &= 3 - 6h + 3h^2 + 9 - 6k + k^2 - 6 + 6h + 2k - 2hk - 12 + 4k \\ &= 3h^2 + k^2 - 2hk - 6\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung

$$\begin{aligned}f(-1 + h, -3 + k) - f(-1, -3) &= \\ &= 3h^2 + k^2 - 2hk - 6 - (-6) \\ &= 3h^2 + k^2 - 2hk \\ &= 2h^2 + k^2 - 2hk + h^2 \\ &= 2h^2 + (k - h)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Terlihat bahwa tanda dari  $[f(-1 + h, -3 + k) - f(-1, -3)] \geq 0$ . Ini berarti fungsi  $f(x, y)$  mencapai nilai minimum relatif di titik stasioner  $(-1, -3)$  dengan  $(-1, -3) = -6$ .

$$4. \quad f(x, y) = \cos x \sin y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x = -\sin x \sin y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y = \cos x \cos y$$

$f_x = -\sin x \sin y = 0$  dan  $f_y = \cos x \cos y = 0$ , mempunyai himpunan penyelesaian jika  $\cos x = \sin y = 0$  dan  $\sin x = \cos y = 0$ . **(skor 10)**

Karena  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , maka  $\cos x \neq 0$  dan  $\sin x \neq 0$ .

Untuk  $\cos x = \sin y = 0$ , maka

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \text{bilangan bulat}$$

$$y = m\pi, m \in \text{bilangan bulat}$$

Untuk  $\sin x = \cos y = 0$ , maka

$$x = n\pi, n \in \text{bilangan bulat}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \text{bilangan bulat}$$

selanjutnya dihitung nilai diskriminan

$$A = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f_{xx} = -\cos x \sin y$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{xy} = -\sin x \cos y$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f_{yy} = -\cos x \sin y$$

$$D = B^2 - AC = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$= (-\cos x \sin y)^2 - (-\sin x \cos y)^2$$

**(skor 4)**

Untuk  $\cos x = \sin y = 0$ ,

$$D = (-\cos x \sin y)^2 - (-\sin x \cos y)^2$$

$$= (0)^2 - (-\sin x \cos y)^2$$

$$= -(-\sin x \cos y)^2$$

$$= -(1)^2 \dots\dots\dots \text{karena } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$= -1 < 0$$

**(skor 4)**

Karena  $D < 0$ , maka semua titik saat  $\cos x = \sin y = 0$  merupakan titik pelana.

$$\begin{aligned}\text{Untuk } \sin x = \cos y = 0 \quad , \quad D &= (-\cos x \sin y)^2 - \\ &(-\sin x \cos y)^2 \\ &= (\cos x \sin y)^2 - (0)^2 \\ &= (\cos x \sin y)^2 \\ &= (1)^2 \dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{karena } \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ &= 1 > 0\end{aligned}$$

$f_{xx} = -\cos x \sin y$  untuk  $x = n\pi, n \in \text{bilangan bulat}$  dan  $y = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \text{bilangan bulat}$ .

(skor 2)

Sebagai catatan bahwa  $\cos(n\pi)$  adalah  
Bernilai 1 jika  $n$  anggota bilangan genap dan  
bernilai  $-1$  jika  $n$  anggota bilangan ganjil.  
dan  $\sin(\frac{\pi}{2} + m\pi)$  adalah  
Bernilai 1 jika  $m$  anggota bilangan genap dan  
bernilai  $-1$  jika  $m$  anggota bilangan ganjil.

Hal ini dapat dinyatakan sebagai

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \text{ dan } \sin(\frac{\pi}{2} + m\pi) = (-1)^m$$

$$\begin{aligned}f_{xx}\left(n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right) &= -\cos(n\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) \\ &= -(-1)^n (-1)^m \\ &= (-1)^{m+n+1}\end{aligned}$$

$f_{xx} > 0$  ketika  $(m + n)$  ganjil

$f_{xx} < 0$  ketika  $(m + n)$  genap

Oleh karena itu,

**Untuk titik  $(n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$  dengan  $(m + n)$  ganjil, maka titik tersebut merupakan titik minimum.**

**Untuk titik  $(n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$  dengan  $(m + n)$  genap, maka titik tersebut merupakan titik maksimum.**

Untuk titik  $(\frac{\pi}{2} + n\pi, m\pi)$ , maka titik tersebut merupakan titik pelana.

(skor 5)

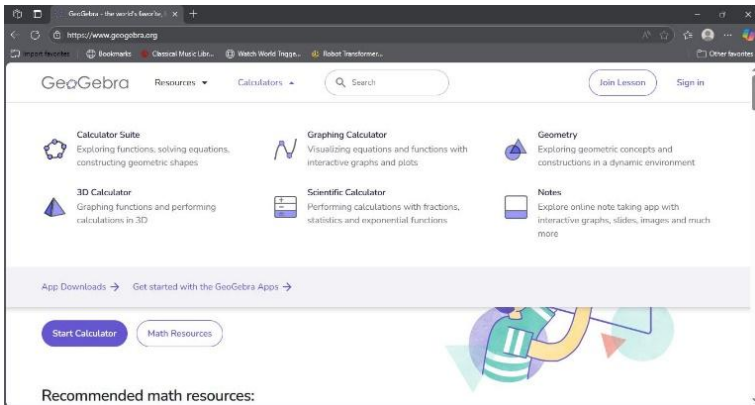
atau

Dengan kata lain, untuk batasan

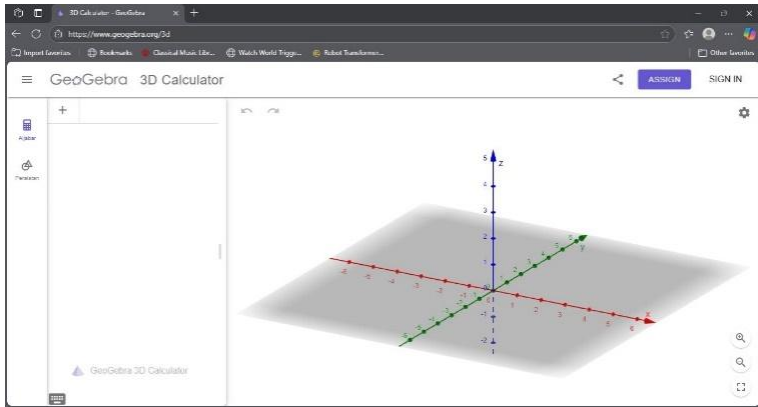
$0 \leq x \leq \pi$  dan  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , terdapat 5 titik kritis yaitu 2 titik maksimum pada  $(0, \frac{\pi}{2})$  dan  $(\pi, -\frac{\pi}{2})$ , 2 titik minimum pada  $(0, -\frac{\pi}{2})$  dan  $(\pi, \frac{\pi}{2})$ , dan 1 titik pelana pada  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ .

#### E. Terapan pada Geogebra (Mencari Titik Ekstrim Menggunakan Geogebra)

Kunjungi website geogebra <https://www.geogebra.com>, pilih menu Calculators kemudian pilih 3D Calculator.



Setelah memilih menu 3D Calculator, akan muncul tampilan seperti di bawah ini :



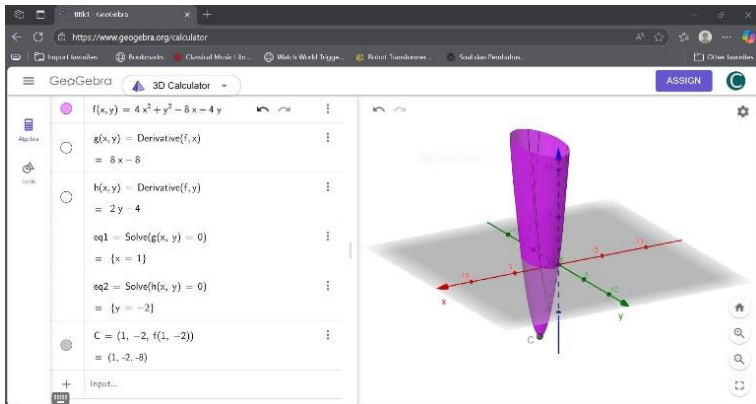
Untuk menggambar grafik fungsi, ketik fungsi pada kotak dibawah ini :

+

GeoGebra 3D Calculator

Ketik  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y$ , pada kotak di atas, untuk mendapat turunan parsial dari fungsi tersebut ketik  $g(x, y) = \text{Derivative}(f, x)$  dan  $h(x, y) = \text{Derivative}(f, y)$ , untuk mendapatkan solusi dari  $g(x, y) = 0$  ketik  $\text{eq1} = \text{solve}(g(x, y) = 0)$

didapat  $x=1$ , untuk mendapatkan Solusi dari  $h(x,y)=0$  ketik  $eq2=solve(h(x,y)=0)$  didapat  $y=-2$ , untuk mendapatkan titik ekstrim ketik  $C=(1,-2,f(1,-2))$ :





Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB 6

## FORMULA DAN DERET TAYLOR

### A. Pendahuluan

Dalam pembahasan mengenai Formula dan Deret Taylor, pembaca diharapkan dapat memahami serta menjelaskan berbagai pengertian dan sifat-sifat yang berhubungan dengan formula dan Deret Taylor. Adapun capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bab ini, yaitu mampu:

1. Menjelaskan konsep Formula dan Deret Taylor;
2. Menentukan Formula Taylor.

### B. Materi

#### 1. Formula dan Deret Taylor

Formula Taylor derajat  $(n - 1)$  dengan suku sisa  $R_n$  dinyatakan dengan:  $f(a + h, b + k) = f(a, b) +$

$$\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)}{1!} + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)}{2!} + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)}{3!} + \dots + \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b)}{(n-1)!} + R_n$$

dengan

$$R_n = \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a + \theta h, b + \theta k)}{n!}$$

dengan  $0 < \theta < 1$  (Adams & Essex, 2010; Apostol, 1999; Soedijono, 2008; Warsito, 2020).

Silahkan simak video mengenai Formula dan Deret Taylor berikut.

- a. Video Deret Taylor

(Patrick J, 2012)

<https://www.youtube.com/watch?v=WKvBJdl1qrM>

- b. Video Deret Taylor dan MacLaurin

<https://www.youtube.com/watch?v=dp2ovDuWhro>

- c. Video Deret Taylor dua variable

<https://www.youtube.com/watch?v=D8AjFhLhFvA>

### Contoh Formula dan Deret Taylor:

- a. Tentukan Formula Taylor fungsi  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  di sekitar titik  $(1, -1)$  dengan  $n = 3$
- b. Jika diberikan fungsi  $f(x, y) = \cos xy$  maka  $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$  adalah ...

### Pembahasan:

$$a. f(x, y) = \frac{1}{xy} = x^{-1}y^{-1} \qquad f(1, -1) = -1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x^{-2}y^{-1} \qquad \frac{\partial f(1, -1)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2} \qquad \frac{\partial f(1, -1)}{\partial y} = -1$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(1, -1) &= h \frac{\partial f(1, -1)}{\partial x} + k \frac{\partial f(1, -1)}{\partial y} \\ &= h(1) + k(-1) = h - k \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2x^{-3}y^{-1}$$

Ini merupakan turunan kedua dari fungsi  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ , yang diperoleh dengan cara menurunkan kembali fungsi  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x^{-2}y^{-1}$  terhadap  $x$ . Karena pada soal yang ditanyakan di sekitar  $(1, -1)$ , maka kita substitusikan:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2x^{-3}y^{-1} \rightarrow \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = x^{-2}y^{-2}$$

Ini merupakan turunan kedua dari fungsi  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ , yang diperoleh dengan cara menurunkan fungsi  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x^{-2}y^{-1}$  terhadap  $y$ . Karena pada soal yang ditanyakan di sekitar  $(1, -1)$ , maka kita substitusikan:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = x^{-2}y^{-2} \rightarrow \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x^{-1}y^{-3}$$

Ini merupakan turunan kedua dari fungsi  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ , yang diperoleh dengan cara menurunkan fungsi  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2}$  terhadap  $y$ . Karena pada soal yang ditanyakan di sekitar  $(1, -1)$ , maka kita substitusikan:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x^{-1}y^{-3} \rightarrow \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial y^2} = -2$$

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(1, -1) &= h^2 \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x \partial y} \\ &\quad + k^2 \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial y^2} \\ &= -2h^2 + 2hk - 2k^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^1 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{\partial y} &= -(1 + \theta h)^{-1}(-1 + \theta k)^{-2} \\ &= \frac{-1}{(1 + \theta h)^1(-1 + \theta k)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2x^{-3}y^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{\partial x^2} &= 2(1 + \theta h)^{-3}(-1 + \theta k)^{-1} \\ &= \frac{2}{(1 + \theta h)^3(-1 + \theta k)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} = -6x^{-4}y^{-1}$$

$$\frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{\partial x^3} = \frac{-6}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = -2x^{-3}y^{-2}$$

$$\frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{-2}{(1+\theta h)^3(-1+\theta k)^2}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2} = -2x^{-2}y^{-3}$$

$$\frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{\partial x \partial y^2} = \frac{-2}{(1+\theta h)^2(-1+\theta k)^3}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} = -6x^{-1}y^{-4}$$

$$\frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{\partial y^3} = \frac{-6}{(1+\theta h)(-1+\theta k)^4}$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)$$

$$= h^3 \frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)} + \frac{-6h^2 k}{(1+\theta h)^3(-1+\theta k)^2}$$

$$+ \frac{-6hk^2}{(1+\theta h)^2(-1+\theta k)^3} + \frac{-6k^3}{(1+\theta h)(-1+\theta k)^4}$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)$$

$$= \frac{-6h^3}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)} + \frac{-6h^2 k}{(1+\theta h)^3(-1+\theta k)^2}$$

$$+ \frac{-6hk^2}{(1+\theta h)^2(-1+\theta k)^3} + \frac{-6k^3}{(1+\theta h)(-1+\theta k)^4}$$

$$= \frac{-6[h^2(-1+\theta k)^2 + k^2(1+\theta h)^2][h(-1+\theta k) + k(1+\theta h)]}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)^4}$$

Dengan demikian, formula Taylor fungsi  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  di sekitar titik  $(1, -1)$  adalah

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+h)(-1+k)} &= -1 + (h-k) + \frac{-2h^2 + 2hk - 2k^2}{2} + R_3 \\ &= -1 + (h-k) - (h^2 - hk + k^2) + R_3\end{aligned}$$

dengan suku sisa

$$\begin{aligned}R_3 &= \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{3!} \\ &= \frac{-[h^2(-1+\theta k)^2 + k^2(1+\theta h)^2][h(-1+\theta k) + k(1+\theta h)]}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)^4}\end{aligned}$$

b.  $f(x, y) = \cos xy$  maka  $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) = \dots$

$$f(x, y) = \cos xy$$

$$f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-90) = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -y \sin xy$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x} &= \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin(-90) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times -1 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x \sin xy$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial y} &= (-1) \sin\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1) \sin(-90) = (-1) \times -1 = 1\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x^2} &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(-90) \\ &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= -1(\sin xy) + (y \cos xy)(-y) \\ &= -\sin xy - y^2 \cos xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x \partial y} &= -\sin xy - y^2 \cos xy \\
&= -\sin\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin(-90) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(-90) \\
&= 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (0) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= -x^2 \cos xy \\
\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial y^2} &= -(1)^2 \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\cos(-90) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) \\
&= h^2 \left(\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x^2}\right) + 2hk \left(\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x \partial y}\right) \\
&\quad + k^2 \left(\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial y^2}\right) \\
&= h^2(0) + 2hk(1) + k^2(0) = 2hk
\end{aligned}$$

### C. Rangkuman

Teorema Taylor derajat dua

Misalkan  $f(x, y)$  mempunyai turunan ketiga yang kontinu, maka

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2!} \left[ (x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] \text{ dengan}$$

$$R_3 = \frac{\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{3!}$$

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan Formula Taylor orde tiga untuk fungsi  $f(x, y) = \cos x \cos y$  di sekitar titik  $(0,0)$ . **(skor 50)**
2. Tentukan Formula Taylor fungsi  $f(x, y) = x^4 + y^4$  di sekitar titik  $(1,1)$  dengan  $n = 3$ . **(skor 50)**

#### Pembahasan:

1. Deret Taylor orde tiga dari

$$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

di sekitar titik  $(0,0)$ .

#### Langkah 1: Rumus Umum Deret Taylor Dua Variabel

Untuk fungsi  $f(x,y)$ , Deret Taylor di sekitar  $(0,0)$  hingga orde tiga adalah:

$$f(x, y) \approx f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3].$$

**(skor 10)**



## Langkah 2: Hitung Turunan Parsial

Fungsi:

$$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

Orde 0:

$$f(0,0) = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1$$

Orde 1:

$$f_x = -\sin x \cos y \Rightarrow f_x(0,0) = 0$$

$$f_y = -\cos x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$$

Orde 2:

$$f_{xx} = -\cos x \cos y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1$$

$$f_{xy} = \sin x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f_{yy} = -\cos x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$$

Orde 3:

$$f_{xxx} = \sin x \cos y \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = 0$$

$$f_{xxy} = \cos x \sin y \Rightarrow f_{xxy}(0,0) = 0$$

$$f_{xyy} = \cos x \sin y \Rightarrow f_{xyy}(0,0) = 0$$

$$f_{yyy} = -\cos x \sin y \Rightarrow f_{yyy}(0,0) = 0$$

(skor 10)

## Langkah 3: Susun Deret Taylor hingga Orde Tiga

Gunakan hasil di atas:

$$f(x, y) \approx 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \frac{1}{2}(-1)y^2 + 0 \cdot xy + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2y + 0 \cdot xy^2 + 0 \cdot y^3$$

Jadi:

$$f(x, y) \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

(skor 10)

Tapi kita ingat bahwa ekspansi **orde tiga** mencakup **semua** suku dengan total derajat  $\leq 3$ , termasuk interaksi dari suku lebih tinggi yang berasal dari ekspansi penuh (misalnya saat  $f(x, y)$  ditulis sebagai deret dari hasil kali  $\cos x$  dan  $\cos y$ ).

Jadi, kita ambil Deret Taylor dari:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \dots$$

Kalikan keduanya:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + (\text{suku orde lebih tinggi}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{4} \end{aligned}$$

(skor 20)

**Jawaban Akhir**

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{4}$$

Ini adalah **ekspansi Taylor orde tiga** dari  $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$  di sekitar titik  $(0, 0)$ .

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB

# 7

## INTEGRAL FUNGSI BERNILAI VEKTOR

### A. Pendahuluan

Dalam kajian matematika, khususnya pada kalkulus multivariat, tidak semua fungsi menghasilkan bilangan real sebagai keluarannya. Pada beberapa kasus, hasil dari suatu fungsi dapat berupa vektor, yang kemudian disebut sebagai fungsi bernilai vektor. Fungsi ini memiliki peranan penting dalam berbagai bidang terapan, seperti fisika (misalnya pada konsep medan gaya dan kecepatan), rekayasa, serta ilmu komputer. Pemahaman mengenai sifat, bentuk representasi, serta contoh fungsi bernilai vektor menjadi dasar yang diperlukan sebelum mempelajari konsep-konsep lanjutan dalam kalkulus vektor.

Setelah mempelajari materi mengenai fungsi bernilai vektor, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan definisi serta bentuk umum fungsi bernilai vektor dalam ruang dua dan tiga dimensi.
2. Mengidentifikasi komponen-komponen fungsi bernilai vektor sekaligus menggambarkan representasinya secara geometris.
3. Melakukan operasi dasar pada fungsi bernilai vektor, seperti penjumlahan, perkalian dengan skalar, serta turunan fungsi.
4. Menganalisis sifat dan perilaku fungsi bernilai vektor pada kasus pergerakan benda, medan vektor, atau lintasan kurva dalam ruang.

5. Menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan fungsi bernilai vektor beserta penerapannya dalam ilmu pengetahuan dan teknik.(Ariawan & Zetriuslita, 2023).

## B. Materi

### 1. Pengertian Fungsi Bernilai Vektor

Fungsi bernilai vektor merupakan fungsi yang menerima bilangan real atau vektor sebagai (*input*)-nya, dan menghasilkan vektor sebagai keluarannya (*output*). Secara umum, fungsi bernilai vektor dari satu peubah real dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

dengan  $f(t), g(t), h(t)$  adalah fungsi-fungsi skalar dari peubah real  $t$ , dan  $\vec{r}(t)$  adalah vektor dalam  $R^3$  (Marsden & Tromba, 2012). Jika hanya dua komponen, maka  $\vec{r}(t) \in R^2$ .

### 2. Contoh Fungsi Bernilai Vektor

- a. Fungsi dalam  $R^2$

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$$

Fungsi ini menggambarkan lintasan melingkar pada bidang  $xy$  dengan jari-jari 1 (Dawkins, 2025).

- b. Fungsi dalam  $R^3$

$$\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$$

Fungsi ini menggambarkan lintasan kurva di ruang tiga dimensi.

### 3. Operasi pada Fungsi Bernilai Vektor

Beberapa operasi penting:

#### a. Penjumlahan:

$$\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = \langle f_1(t) + f_2(t), g_1(t) + g_2(t), h_1(t) + h_2(t) \rangle$$

#### b. Perkalian Skalar:

Jika  $c$  adalah skalar, maka

$$c \cdot \vec{r}(t) = \langle cf(t), cg(t), ch(t) \rangle$$

**c. Turunan:**

Turunan dari fungsi vektor dilakukan secara komponen demi komponen:

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

**4. Aplikasi**

Fungsi bernilai vektor sering digunakan dalam:

- a. Fisika:** digunakan untuk merepresentasikan posisi, kecepatan, maupun percepatan suatu partikel.
- b. Grafika komputer:** dimanfaatkan dalam pemodelan gerakan serta lintasan objek.
- c. Medan vektor:** berfungsi untuk menggambarkan sebaran arah dan besarnya gaya di dalam ruang.

**Contoh Soal:**

- a. Diberikan fungsi vektor  $\vec{r}(t) = \langle 2t, 3 \sin t, \ln(t + 1) \rangle$ . Tentukan nilai  $\vec{r}(0)$ .
- b. Diberikan fungsi vektor  $\vec{r}(t) = \langle t^3, e^t, \cos t \rangle$ . Tentukan turunan pertama  $\vec{r}'(t)$  dan evaluasi pada  $t = 0$ .

**Pembahasan:**

- a. Substitusikan  $t = 0$  ke dalam masing-masing komponen:

$$\vec{r}(0) = \langle 2(0), 3 \sin(0), \ln(0 + 1) \rangle = \langle 0, 0, \ln(1) \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$

- b. Turunkan masing-masing komponen terhadap  $t$ :  $\vec{r}'(t) =$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(t^3), \frac{d}{dt}(e^t), \frac{d}{dt}(\cos t) \right\rangle = \langle 3t^2, e^t, -\sin t \rangle$$

Evaluasi di  $t = 0$ :

$$\vec{r}'(0) = \langle 3(0)^2, e^0, -\sin(0) \rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

### C. Rangkuman

Fungsi bernilai vektor menghasilkan vektor sebagai *output*. Biasanya dituliskan dalam bentuk

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Operasi dasar seperti penjumlahan, perkalian skalar, dan turunan dilakukan per komponen.

Fungsi bernilai vektor banyak diaplikasikan dalam bidang teknik dan sains.

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Diberikan fungsi  $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ 
  - a. Hitung turunan pertama  $\vec{r}'(t)$ .
  - b. Tentukan nilai  $\vec{r}'(\pi/2)$ .(skor 25)
2. Jika  $\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$ , tentukan:  
Panjang vektor kecepatan  $|\vec{r}(t)|$  pada  $t = 1$ .  
(skor 25)
3. Jika  $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$ , hitung panjang vektor kecepatan  $|\vec{r}(t)|$  saat  $t = \pi$ .  
(skor 25)
4. Sebuah partikel bergerak mengikuti lintasan yang diberikan oleh  $\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$ . Tentukan posisi, kecepatan, dan percepatan partikel pada  $t = 1$ .  
(skor 25)

#### Pembahasan:

1. Diberikan fungsi vektor:

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$$

**a. Hitung Turunan Pertama  $\vec{r}(t)$**

Turunan dari fungsi vektor dilakukan komponen per komponen:

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt} \cos t, \frac{d}{dt} \sin t, \frac{d}{dt} t \right\rangle = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$$

(skor 10)

**b. Evaluasi di  $t = \frac{\pi}{2}$**

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 1 \right\rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

(skor 15)

**Jawaban Akhir:**

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

**2. Diberikan fungsi vektor:**

$$\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$$

**a. Hitung Vektor Kecepatan  $\vec{r}'(t)$**

Turunan komponen per komponen:

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt} (t^2), \frac{d}{dt} (2t), \frac{d}{dt} (3) \right\rangle = \langle 2t, 2, 0 \rangle$$

(skor 10)

**b. Evaluasi di  $t = 1$**

$$\vec{r}'(1) = \langle 2(1), 2, 0 \rangle = \langle 2, 2, 0 \rangle$$

(skor 10)

**c. Hitung Panjang Vektor Kecepatan**

$$|\vec{r}'(1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(skor 5)

**Jawaban Akhir:**

$$|\vec{r}'(1)| = 2\sqrt{2}$$

Ini adalah panjang (magnitudo) vektor kecepatan pada  $t = 1$ .



3. Untuk menghitung panjang vektor kecepatan  $|\vec{r}'(t)|$  dari vektor posisi:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$$

**Langkah-langkah:**

Turunkan  $\vec{r}(t)$  terhadap  $t$  untuk mendapatkan vektor kecepatan:

$$\vec{r}'(t) = \langle \cos t, -\sin t, 1 \rangle. \text{ (skor 10)}$$

Panjang vektor kecepatan (magnitudo) diberikan oleh:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2 + 1^2}. \text{ (skor 10)}$$

Sederhanakan:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}. \text{ (skor 5)}$$

Jadi, panjang vektor kecepatan saat  $t = \pi$  adalah:

$$|\vec{r}'(\pi)| = \sqrt{2}$$

**Jawaban akhir:**  $\sqrt{2}$

4. Diberikan:

$$\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$$

- a. Posisi pada  $t = 1$ :

$$\vec{r}(1) = \langle 1^2, 2(1), 3 \rangle = \langle 1, 2, 3 \rangle. \text{ (skor 8)}$$

- b. Kecepatan  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ :

Turunan terhadap  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(t^2), \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(3) \right\rangle = \langle 2t, 2, 0 \rangle$$

Pada  $t = 1$ :

$$\vec{v}(1) = \langle 2(1), 2, 0 \rangle = \langle 2, 2, 0 \rangle$$

(skor 8)

- c. Percepatan  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$ :

Turunan kecepatan terhadap  $t$ :

$$\vec{a}(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(2), \frac{d}{dt}(0) \right\rangle = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

Pada  $t = 1$  (tetap sama):

$$\vec{a}(1) = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

(skor 7)

**Jawaban akhir:**

a. Posisi:  $\vec{r}(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$

b. Kecepatan:  $\vec{v}(1) = \langle 2, 2, 0 \rangle$

c. Percepatan:  $\vec{a}(1) = \langle 2, 0, 0 \rangle$

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB

# 8

## INTEGRAL LIPAT DUA

### A. Pendahuluan

Pada bagian ini akan dibahas konsep dasar mengenai integral lipat dua, cara menghitung nilai integral ganda, serta penerapannya pada fungsi yang terdefinisi di suatu daerah tertentu. Sebelum mendalami topik ini, disarankan Anda sudah memahami materi tentang transformasi koordinat, baik dari sistem koordinat Cartesius ke koordinat polar, maupun ke sistem koordinat silinder dan bola. Setelah mempelajari materi ini, capaian pembelajaran yang diharapkan adalah:

1. Mampu mendeskripsikan pengertian integral lipat dua;
2. Terampil dalam menyelesaikan perhitungan integral lipat dua.

### B. Materi

#### 1. Integral Lipat Dua

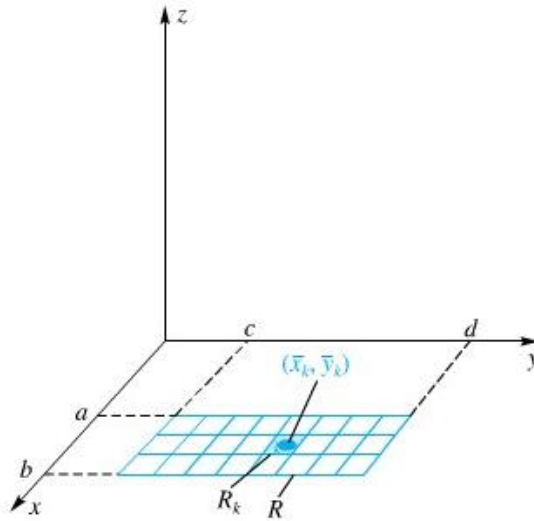
Penjelasan mengenai integral lipat dua dimulai dengan integral Riemann (Purcell & Varberg, 1987). Dalam integral Riemann, untuk fungsi satu peubah membentuk suatu partisi  $P$  dari selang  $[a, b]$  menjadi beberapa selang bagian yang panjangnya  $\Delta x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , kemudian mengambil sebuah titik dari selang bagian ke-  $k$  sehingga diperoleh

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta x_k$$

Untuk mendefinisikan integral lipat dua, akan digunakan penulisan yang sama dengan penulisan integral tentu untuk satu peubah seperti di atas.

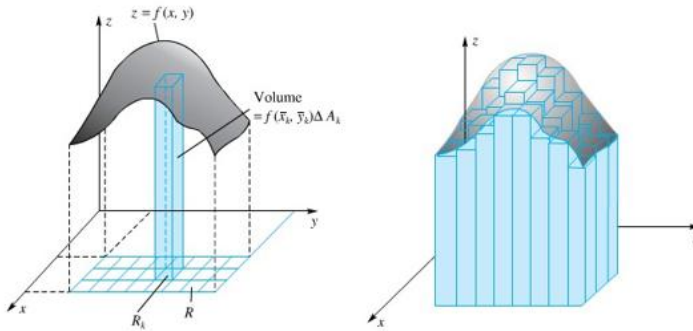
Jika  $R$  merupakan suatu persegi panjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, yaitu:

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



Persegi panjang  $R$  kita partisi dengan garis bantu yang sejajar sumbu  $x$  dan sumbu  $y$  menjadi persegi panjang sebanyak  $n$  buah yang ditunjukkan dengan  $R_k$  dimana  $k = 1, 2, \dots, n$ . Panjang sisi-sisi  $R_k$  adalah  $\Delta x_k$  dan  $\Delta y_k$ . Luas  $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ .

Ambil sebuah titik  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  pada  $R_k$ . Bentuk penjumlahan Riemann jika  $f(x, y) \geq 0$  yang berpadanan dengan jumlah volume dari  $n$  kotak adalah  $\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$ . Buat semua  $R_k$  menjadi lebih kecil dengan cara membuat partisi yang semakin halus sehingga akan kita peroleh konsep integral lipat dua.



$|P|$  merupakan panjang diagonal terpanjang dari setiap persegi panjang bagian dalam partisi.

## 2. Definisi

Andaikan  $f$  suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup  $R$ . Jika  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k$  ada, kita katakan  $f$  dapat diintegralkan pada  $R$ .

$\iint_R f(x, y) dA$ , yang disebut integral lipat-dua  $f$  pada  $R$ , dinyatakan dengan

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k$$

Jika  $f(x, y) \geq 0$ , maka  $\iint_R f(x, y) dA$  menyatakan volume benda pejal di bawah permukaan  $z = f(x, y)$  dan di atas persegi panjang  $R$ .

## 3. Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

Sifat-sifat yang dimiliki integral lipat dua hampir semua sama dengan sifat integral tunggal, yaitu:

a. Bersifat linear, yakni:

$$\begin{aligned} \iint_R k f(x, y) dA &= k \iint_R f(x, y) dA \\ \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA &= \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA \end{aligned}$$

- b. Bersifat aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi pada suatu ruas garis.

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} g(x, y) dA$$

- c. Sifat perbandingan berlaku. Jika  $f(x, y) \leq g(x, y)$  untuk semua  $(x, y)$  di  $R$ , maka

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

#### 4. Perhitungan Integral Lipat Dua

Jika  $f(x, y) = 1$  pada  $R$ , maka integral lipat dua merupakan luas  $R$  sehingga

$$\iint_R k dA = k \iint_R 1 dA = kA(R)$$

Contoh.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,5, & \text{jika } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1 \\ 1,5, & \text{jika } 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3 \\ 2, & \text{jika } 0 \leq x \leq 4, 3 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

dan daerah  $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$

Tentukan  $\iint_R f(x, y) dA$ .

##### Pembahasan:

Karena fungsi bernilai konstan pada tiap pita horizontal, integral ganda pada  $R$  dapat dihitung dengan menjumlahkan kontribusi tiap pita (nilai fungsi  $\times$  luas pita).

- Pita pertama:  $0 \leq y \leq 1$  lebar di arah  $x$  adalah 4, tinggi pita = 1, luas = 4. Kontribusi:  $0,5 \times 4 = 2$ .
- Pita kedua:  $1 \leq y \leq 3$  lebar di arah  $x$  adalah 4, tinggi pita = 2, luas = 8. Kontribusi:  $1,5 \times 8 = 12$ .
- Pita ketiga:  $3 \leq y \leq 4$  lebar di arah  $x$  adalah 4, tinggi pita = 1, luas = 4. Kontribusi:  $2 \times 4 = 8$ .

Jumlahkan semua kontribusi:

$$\iint_R f(x, y) dA = 2 + 12 + 8 = 22.$$

Jika ingin ditulis sebagai integral iteratif, maka:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^4 \int_0^1 0,5 \, dy dx + \int_0^4 \int_1^3 1,5 \, dy dx + \int_0^4 \int_3^4 2 \, dy dx$$

$$\int_0^4 \int_0^1 0,5 \, dy dx = \int_0^4 [0,5y]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^4 0,5 (1 - 0) dx = 0,5 (4 - 0) = 2.$$

$$\int_0^4 \int_1^3 1,5 \, dy dx = \int_0^4 [1,5y]_{y=1}^{y=3} dx = \int_0^4 1,5 (3 - 1) dx = \int_0^4 3 \, dx = 3 \times 4 = 12$$

$$\int_0^4 \int_3^4 2 \, dy dx = \int_0^4 [2y]_{y=3}^{y=4} dx = \int_0^4 2 (4 - 3) dx = \int_0^4 2 \, dx = 2 \times 4 = 8$$

$$\iint_R f(x, y) dA = 2 + 12 + 8 = 22.$$

### C. Rangkuman

Interpretasi integral lipat dua  $f(x, y)$  pada persegi panjang  $R$  adalah volume di bawah fungsi  $f(x, y)$  (dan di atas bidang  $xy$ ) atau

$$\text{Volume} = \iint_R f(x, y) dA$$

Theorema Fubini (Integral iterasi):

Jika  $(x, y)$  kontinu di  $R [a, b] \times [c, d]$  maka,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Hitung  $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dy dx$ . (skor 20)
2. Hitung  $\int_0^3 \int_{y-3}^0 (4 - 2xy) \, dx dy$ . (skor 20)
3. Hitung  $\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) \, dx dy$ . (skor 20)
4. Hitung  $\iint_D (x + y) \, dA$  ;  $D$  daerah yang dibatasi oleh  $y = x^2, y = -x$  dan  $x = 2$ . (skor 20)
5. Hitung volume benda yang dibatasi oleh  $3x + 2y + z = 12, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 6; 0 \leq x \leq 4; 0 \leq z \leq 2$ . (skor 20)



**Pembahasan:**

$$\begin{aligned} 1. \int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dy dx &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_1^2 dx \\ &= \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{2} (x)^2 (2)^2 \right) - \left( \frac{1}{2} (x)^2 (1)^2 \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ 2x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (1)^3 - 0 = \frac{1}{2}, \text{ (skor 20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_0^3 \int_{y-3}^0 (4 - 2xy) \, dx dy &= \int_0^3 [4x - x^2 y] \Big|_{y-3}^0 dy \\ &= \int_0^3 [0 - (4(y-3) - (y-3)^2 y)] dy \\ &= \int_0^3 [-4y + 12 + y^3 - 6y^2 + 9y] dy \\ &= \int_0^3 [12 + y^3 - 6y^2 + 5y] dy \\ &= 12y + \frac{1}{4} y^4 - 2y^3 + \frac{5}{2} y^2 \Big|_0^3 \\ &= 12(3) + \frac{1}{4} (3)^4 - 2(3)^3 + \frac{5}{2} (3)^2 \\ &= 36 + \frac{81}{4} - 54 + \frac{45}{2} \\ &= -18 + \frac{81 + 90}{4} \\ &= \frac{171 - 72}{4} \\ &= \frac{99}{4}, \text{ (skor 20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) \, dx dy &= \int_2^4 \left[ \frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right]_1^2 dy = \frac{70}{3}. \\ &\text{(skor 20)} \end{aligned}$$

4. D adalah daerah yang dibatasi oleh:

- a.  $y = x^2$
- b.  $y = -x$
- c.  $x = 2$

### Langkah 1: Gambar & Pahami Daerah D

#### Kurva-kurva:

- a.  $y = x^2$  — parabola terbuka ke atas
- b.  $y = -x$  — garis lurus miring ke bawah
- c.  $x = 2$  — garis vertical

Cari titik potong  $y = x^2$  dan  $y = -x$ :

$$x^2 = -x \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1$$

Jadi:

- a. Titik potong antara parabola dan garis:  $x = -1$  dan  $x = 0$
- b. Batas  $x$  dari daerah: dari  $x = -1$  sampai  $x = 2$

Untuk masing-masing  $x$ , kurva bawah:  $y = x^2$ , atas:  $y = -x$  (karena  $x^2 \leq -x$  di daerah tersebut).

### Langkah 2: Nyatakan sebagai integral iterasi

$$\iint_D (x + y) dA = \int_{x=-1}^2 \int_{y=x^2}^{-x} (x + y) dy dx$$

### Langkah 3: Hitung integral dalam (terhadap $y$ )

$$\int_{y=x^2}^{-x} (x + y) dy = \int_{x^2}^{-x} x dy + \int_{x^2}^{-x} y dy$$

#### Hitung masing-masing:

$$\int_{x^2}^{-x} x dy = x(-x - x^2) = x(-x - x^2) = -x^2 - x^3$$

$$\int_{x^2}^{-x} y dy = \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{-x} = \frac{(-x)^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}$$

#### Jumlah:

$$\int_{x^2}^{-x} (x + y) dy = -x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} = -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}$$

**Langkah 4: Integrasi luar (terhadap  $x$ )**

$$\int_{x=-1}^2 \left(-\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^2 x^2 dx - \int_{-1}^2 x^3 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^2 x^4 dx$$

**Hitung masing-masing:**

$$\text{a. } \int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{b. } \int_{-1}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\text{c. } \int_{-1}^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^2 = \frac{32}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{33}{5}$$

**Langkah 5: Gabungkan semuanya**

$$= -\frac{1}{2}(3) - \frac{15}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{5} = -\frac{3}{2} - \frac{15}{4} - \frac{33}{10}$$

$$= -\frac{30}{20} - \frac{75}{20} - \frac{66}{20} = -\frac{171}{20}$$

(skor 20)

**Jawaban Akhir:**  $-\frac{171}{20}$ **5. Untuk menghitung volume benda yang dibatasi oleh:**Bidang:  $3x + 2y + z = 12 \rightarrow$  atau  $z = 12 - 3x - 2y$ Batas bawah dan atas pada  $z$ :  $0 \leq z \leq 20$ Daerah proyeksi pada bidang  $xy$ :

$$0 \leq x \leq 4$$

$$0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 6$$

**Langkah 1: Identifikasi batas integrasi**

Batas integrasi pada:

$$x \in [0, 4]$$

Untuk setiap  $x, y \in [0, -\frac{3}{2}x + 6]$ Untuk setiap  $(x, y), z \in [0, \min(2, 12 - 3x - 2y)]$ Tapi soal membatasi  $z$  dari bawah ke atas:Bawah:  $z = 0$ Atas: bidang  $z = 12 - 3x - 2y$ , dibatasi pula oleh  $z = 2$

Jadi, untuk setiap  $(x, y)$ , nilai maksimum  $z$  adalah:

$$z_{\max} = \min(12 - 3x - 2y, 2)$$

**Langkah 2: Tentukan daerah proyeksi  $R$  di bidang  $xy$**

Dari:

$$\begin{aligned}x &\in [0, 4] \\ y &\in [0, -\frac{3}{2}x + 6]\end{aligned}$$

Itu adalah daerah segitiga dalam koordinat  $xy$ . Mari kita pakai batas ini dalam integrasi.

**Langkah 3: Tentukan volume dengan integral**

Kita akan menghitung volume:

$$V = \iint_R \int_{z=0}^{\min(2, 12-3x-2y)} dz \, dy \, dx$$

Kita perlu membagi daerah menjadi dua:

Karena fungsi batas atas  $z = 12 - 3x - 2y$  bisa lebih besar atau lebih kecil dari 2, kita harus cari:

$$12 - 3x - 2y = 2 \Rightarrow 3x + 2y = 10 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 5$$

Daerah dibagi menjadi:

Bagian 1: di bawah  $y = -\frac{3}{2}x + 5$   $\Rightarrow z_{\max} = 2$

Bagian 2: antara  $y = -\frac{3}{2}x + 5$  dan  $y = -\frac{3}{2}x + 6 \Rightarrow z_{\max}$   
 $= 12 - 3x - 2y$

**Langkah 4: Tulis integral sebagai jumlah 2 bagian**

a. Bagian 1 ( $z = 0$  sampai 2)

Daerah:

$$\begin{aligned}x &\in [0, 4] \\ y &\in [0, -\frac{3}{2}x + 5]\end{aligned}$$

Volume:

$$V_1 = \int_0^4 \int_0^{-\frac{3}{2}x+5} \int_0^2 dz \, dy \, dx = \int_0^4 \int_0^{-\frac{3}{2}x+5} 2 \, dy \, dx$$

Hitung integral dalam:

$$\int_0^4 2\left(-\frac{3}{2}x + 5\right) dx = 2 \int_0^4 \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) dx = 2 \left[ -\frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_0^4 = 2\left(-\frac{3}{2}(16) + 20\right) = 2(-12 + 20) = 2(8) = 16$$

b. Bagian 2 ( $z = 0$  sampai  $12 - 3x - 2y$ )

Daerah:

$$\begin{aligned} x &\in [0, 4] \\ y &\in \left[-\frac{3}{2}x + 5, -\frac{3}{2}x + 6\right] \end{aligned}$$

Volume:

$$V_2 = \int_0^4 \int_{-\frac{3}{2}x+5}^{-\frac{3}{2}x+6} \int_0^{12-3x-2y} dz \, dy \, dx$$

Hitung integral dalam:

$$\int_0^{12-3x-2y} dz = 12 - 3x - 2y$$

Sehingga:

$$V_2 = \int_0^4 \int_{-\frac{3}{2}x+5}^{-\frac{3}{2}x+6} (12 - 3x - 2y) dy \, dx$$

Hitung integral dalam:

$$\int_{-\frac{3}{2}x+5}^{-\frac{3}{2}x+6} (12 - 3x - 2y) dy = (12 - 3x)y - y^2 \Big|_{y_1}^{y_2}$$

Dengan:

$$y_2 = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$y_1 = -\frac{3}{2}x + 5$$

Selisih  $y_2 - y_1 = 1$ , interval kecil, jadi ekspresi cukup sederhana:

hitung total:

$$1) \, a = -\frac{3}{2}x + 5$$

$$2) \, b = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$\int_a^b (12 - 3x - 2y) dy = (12 - 3x)(b - a) - (b^2 - a^2)$$

Karena:

$$\begin{aligned} b - a &= 1 \\ b^2 - a^2 &= (b - a)(b + a) = 1 \cdot (a + b) = a + b \end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{aligned} \int_a^b (12 - 3x - 2y) dy &= (12 - 3x)(1) - (a + b) \\ &= 12 - 3x - (-3x + 11) \\ &= 12 - 3x + 3x - 11 = 1 \end{aligned}$$

Jadi:

$$V_2 = \int_0^4 1 \, dx = [x]_0^4 = 4$$

**Langkah 5: Jumlahkan Volume**

$$V = V_1 + V_2 = 16 + 4 = 20$$

(skor 20)

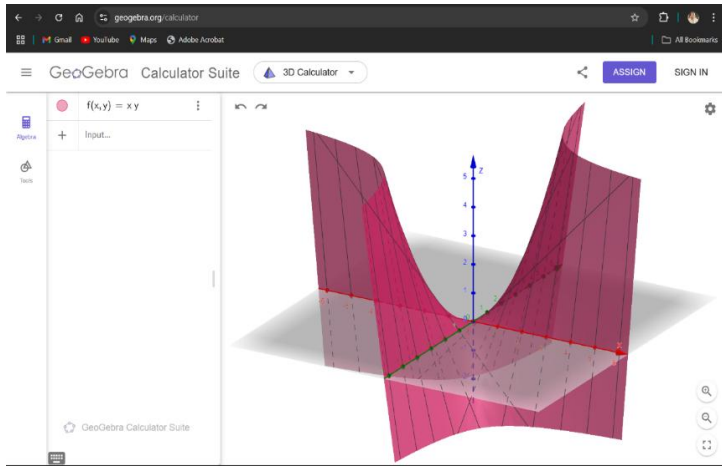
**Jawaban Akhir: 20 satuan volume**

#### **E. Terapan pada Geogebra**

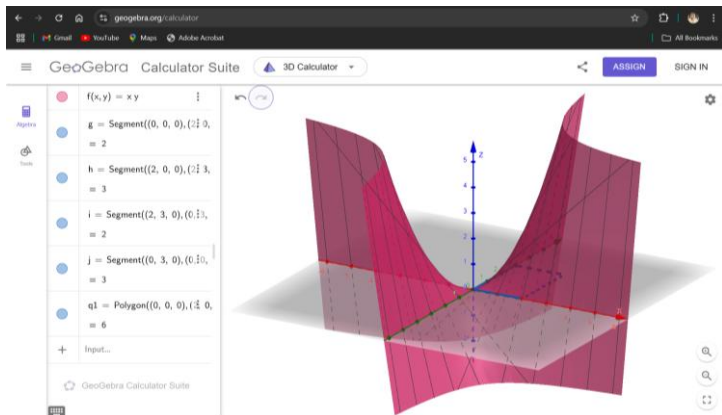
**Langkah-langkah di GeoGebra:**

1. Buka: <https://www.geogebra.org/3d>
2. Masukkan fungsi permukaan:

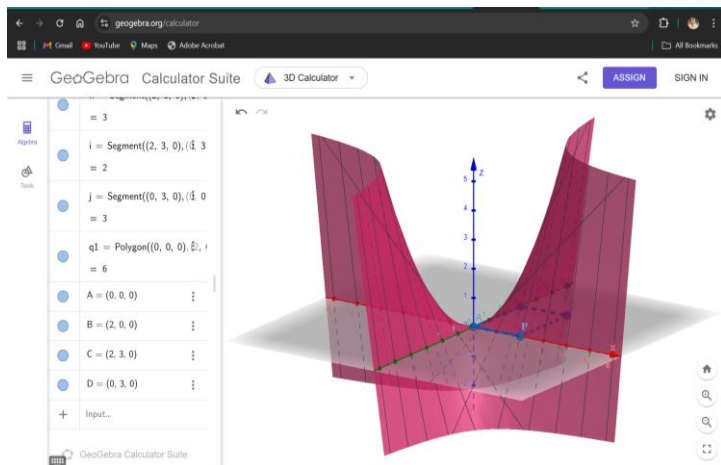
$$f(x, y) = xy$$



3. Buat permukaan di atas daerah:  
 $\text{Surface}(xy, x, 0, 2, y, 0, 3)$
4. (Opsional) Tambahkan garis batas daerah:  
 $\text{Polygon}((0,0,0), (2,0,0), (2,3,0), (0,3,0))$



5. Tambahkan titik-titik atau label:  
 $A = (0, 0, 0)$   
 $B = (2, 0, 0)$   
 $C = (2, 3, 0)$   
 $D = (0, 3, 0)$





Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB 9

## INTEGRAL LIPAT TIGA

### A. Pendahuluan

Bab ini membahas tentang integral ganda, dengan fokus utama pada integral ganda tiga. Untuk memahami materi ini dengan baik, Anda sebaiknya telah menguasai konsep integral satu variabel serta integral ganda dua.

Setelah mempelajari bab ini, pembaca diharapkan dapat menjelaskan konsep serta sifat-sifat yang berkaitan dengan integral ganda tiga. Capaian pembelajaran khusus dari materi ini meliputi:

1. Mampu mendefinisikan pengertian integral lipat tiga.
2. Terampil dalam menghitung nilai integral lipat tiga.

### B. Materi

#### 1. Integral Lipat Tiga

Bentuk Umum Integral Ganda Tiga

$$\iiint_R f(x, y, z) dv$$

Merupakan suatu fungsi tiga variabel dalam daerah tertutup yang terdiri dari titik-titik  $(x, y, z)$  dan volumenya  $V$  (Soedijono, 2008; Warsito, 2020). Dalam hal ini,  $f(x, y, z)$  bernilai tunggal dan kontinu.

Integral Ganda Tiga dalam Koordinat Kartesius dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 \iiint_R f(x, y, z) dv &= \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{y_1=y(z)}^{y_2=y(z)} \int_{x_1=x(y,z)}^{x_2=x(y,z)} f(x, y, z) dx dy dz \\
 &= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{z_1=z(y)}^{z_2=z(y)} \int_{x_1=x(z,y)}^{x_2=x(z,y)} f(x, y, z) dx dz dy \\
 &= \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{x_1=x(z)}^{x_2=x(z)} \int_{y_1=y(x,z)}^{y_2=y(x,z)} f(x, y, z) dy dx dz \\
 &= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{z_1=z(x)}^{z_2=z(x)} \int_{y_1=y(x,z)}^{y_2=y(x,z)} f(x, y, z) dy dx dz \\
 \iiint_R f(x, y, z) dv &= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \int_{z_1=z(y,x)}^{z_2=z(y,x)} f(x, y, z) dz dy dx \\
 &= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy
 \end{aligned}$$

### Contoh Soal

Tentukan  $\iiint_R (x^2 + y) dV$  dengan  $R$  adalah kotak  $R = \{(x, y, z); -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$

### Penyelesaian:

$$\iiint_R (x^2 + y) dV = \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^2 \int_{z=0}^1 (x^2 + y) dz dy dx$$

Integrasi terhadap  $z$

$$\int_0^1 (x^2 + y) dz = (x^2 + y) \cdot 1 = x^2 + y$$

Integrasi terhadap  $y$

$$\int_0^2 (x^2 + y) dy = \left[ x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^2 = x^2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2x^2 + 2$$

Integrasi terhadap  $x$

$$\int_{-1}^1 (2x^2 + 2) dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + 2 \int_{-1}^1 1 dx$$

$$\text{karena } x^2 \text{ genap, } \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$\text{Sehingga, } 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 2 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Jadi, } \iiint_R (x^2 + y) dV = \frac{16}{3}$$

### C. Rangkuman

Bentuk umum notasi integral lipat tiga adalah

$$= \iiint_R (x, y, z) dV$$

merupakan volume daerah tiga dimensi  $R$ .

Interpretasi integral lipat tiga  $f(x, y, z)$  pada kotak

$R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$  adalah

$$\iiint_R (x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan  $\iiint_R dV$  dengan  $R$  adalah benda kurva yang dibatasi oleh persamaan  $x + y + z = 1$  pada oktan I. (**skor 25**)
2. Integral  $\iiint_W (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz$  dengan  $W$  adalah kotak  $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$  adalah .... (**skor 25**)
3. Nilai dari  $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyz dz dy dx$  adalah .... (**skor 25**)
4. Diketahui  $B$  adalah kotak  $B = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$ , nilai dari  $\iiint_B x^2 yz dV$  adalah .... (**skor 25**)

#### Pembahasan:

1. Untuk menyelesaikan integral tiga lipat berikut:

$$\iiint_R dV$$

dengan  $R$  adalah bagian dari ruang di oktan I yang dibatasi oleh bidang  $x + y + z = 1$ , kita akan:

#### a. Memahami batas daerah

Oktan I artinya semua variabel  $x, y, z \geq 0$ .

Batas atasnya adalah bidang  $x + y + z = 1$ .

Maka  $R$  adalah **tetrahedron** di dalam kubus satuan yang dibatasi oleh bidang tersebut. **(skor 15)**

**b. Menentukan batas integral**

Kita gunakan urutan integrasi  $dz\ dy\ dx$ :

$x$  dari 0 sampai 1

untuk setiap  $x, y$  dari 0 sampai  $1-x$

untuk setiap  $x, y, z$  dari 0 sampai  $1-x-y$

Jadi integralnya menjadi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\ dz\ dy\ dx = \frac{1}{6}. \text{ (skor 10)}$$

Jadi, volume benda yang dibatasi oleh  $x + y + z = 1$  di oktan pertama adalah  $\frac{1}{6}$  satuan volume.

2. Kita diberikan sebuah integral tiga lipat:

$$\iiint_W (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz$$

dengan domain  $W$  berupa kotak:

$$W = [0,1] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

**Langkah-langkah:**

Fungsi yang diintegrasikan adalah  $(x + 2y + 3z)^2$ , yang merupakan polinomial kuadrat dalam tiga variabel. **(skor 15)**

Karena domain  $W$  berbentuk kotak (batas tetap dan tidak tergantung variabel lain), kita bisa lakukan integrasi secara langsung dengan urutan apa pun. Misalnya, urutan  $dx\ dy\ dz$ .

Hasil dari integral tiga lipat tersebut adalah:

$$W = [0,1] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{12}. \text{ (skor 10)}$$

Jadi, nilai integralnya adalah  $\frac{1}{12}$  satuan volume.

3. Kita diberikan integral tiga lipat bertingkat:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyz \, dz \, dy \, dx$$

**Langkah-langkah:**

- Urutan integrasi: dari dalam ke luar adalah  $dz$ , lalu  $dy$ , lalu  $dx$ .
- Fungsi yang diintegrasikan adalah  $xyz$ , jadi kita integrasikan  $z$  terlebih dahulu dari 0 ke  $y$ , kemudian  $y$  dari  $x$  ke  $\sqrt{x}$ , dan terakhir  $x$  dari 0 ke 1.

Hasil dari integral tiga lipat tersebut adalah:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyz \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{96}. \text{ (skor 25)}$$

4. Kita diberikan integral tiga lipat:

$$\iiint_B x^2 yz \, dV$$

dengan domain  $B$  adalah kotak:

$$B = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

**Langkah-langkah:**

- Karena batasnya adalah tetap, kita bisa langsung lakukan integrasi bertingkat.
- Urutan:  $dx \, dy \, dz$ , atau lainnya, hasilnya akan tetap sama.
- Fungsi:  $x^2 yz$

Nilai dari integral berikut:

$$\iiint_B x^2 yz \, dV \text{ (skor 15)}$$

dengan

$$B = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

adalah  $\frac{7}{3}$  (skor 10)

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB 10 | INTEGRAL GARIS DENGAN PARAMETER

## A. Pendahuluan

Pada bagian ini akan dibahas topik integral garis. Materi ini penting untuk diperhatikan dan dipahami dengan baik karena menjadi dasar bagi pembahasan Teorema Green pada sesi berikutnya.

Agar dapat mengikuti pembahasan dengan lancar, disarankan Anda telah menguasai materi mengenai integral fungsi satu variabel serta konsep pada fungsi dua variabel. Setelah mempelajari bab ini, pembaca diharapkan memiliki kemampuan untuk:

1. Menjelaskan konsep integral garis.
2. Menghitung nilai integral garis.
3. Menyatakan bahwa integral garis pada lintasan tertutup bernilai nol.

## B. Materi

### 1. Integral Garis dengan Parameter

Bab ini memperkenalkan jenis integral baru. Untuk memahaminya, Anda perlu mengingat kembali beberapa bentuk persamaan parametrik, atau mampu menentukan persamaan parametrik dari kurva yang diberikan. Berikut disajikan tabel yang memuat persamaan parametrik sesuai dengan bentuk kurvanya (Dawkins, 2025).



| Curve                                                    | Persamaan Parametrik                                                                                                                                                                                    |                                                                                      |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Ellips:<br>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$       | <i>Berlawanan arah jarum jam</i><br>$x = a \cos t$<br>$y = b \sin t$<br>$0 \leq t \leq 2\pi$                                                                                                            | <i>Searah jarum jam</i><br>$x = a \cos t$<br>$y = -b \sin t$<br>$0 \leq t \leq 2\pi$ |
| Lingkaran:<br>$x^2 + y^2 = r^2$                          | <i>Berlawanan arah jarum jam</i><br>$x = r \cos t$<br>$y = r \sin t$<br>$0 \leq t \leq 2\pi$                                                                                                            | <i>Searah jarum jam</i><br>$x = r \cos t$<br>$y = -r \sin t$<br>$0 \leq t \leq 2\pi$ |
| $y = f(x)$                                               | $x = t$<br>$y = f(t)$                                                                                                                                                                                   |                                                                                      |
| $x = g(y)$                                               | $x = g(t)$<br>$y = t$                                                                                                                                                                                   |                                                                                      |
| Segmen garis dari $(x_0, y_0, z_0)$ ke $(x_1, y_1, z_1)$ | $\vec{r}(t) = (1-t)\langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle x_1, y_1, z_1 \rangle, 0 \leq t \leq 1$<br>atau<br>$x = (1-t)x_0 + tx_1$<br>$y = (1-t)y_0 + ty_1, 0 \leq t \leq 1$<br>$z = (1-t)z_0 + tz_1$ |                                                                                      |

Persamaan pada bagian akhir tabel dapat dipandang sebagai persamaan vektor sekaligus bentuk parametrik. Untuk kasus fungsi dua peubah, komponen  $z$  cukup dihilangkan.

Pada kurva elips maupun lingkaran, terdapat dua kemungkinan parameterisasi: satu menghasilkan lintasan searah jarum jam dan yang lain berlawanan arah jarum jam, keduanya dimulai dari sumbu  $x$  positif ketika  $t = 0$ .

Dalam materi Kalkulus I, kita mengenal integral  $f(x)$ , yaitu fungsi satu peubah yang diintegrasikan pada sebuah interval (Istikomah, 2022; Leithold, 1972). Sementara pada integral garis, fungsi yang diintegrasikan berupa  $f(x, y)$  yakni fungsi dua peubah, dengan nilai  $x$  dan  $y$  diambil dari titik-titik  $(x, y)$  yang terletak pada kurva  $C$ .

Kita mulai dengan mendefinisikan kurva  $C$  yang memuat titik-titik tersebut. Diasumsikan kurva  $C$  halus, dan dinyatakan dalam bentuk persamaan parametrik,

$$x = h(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

Jika dituliskan dalam bentuk fungsi vektor, maka kurva tersebut memiliki persamaan,

$$\vec{r}(t) = h(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \quad a \leq t \leq b$$

Kurva tersebut dikatakan mulus jika  $\vec{r}(t)$  kontinu dan  $\vec{r}(t) \neq 0$  untuk semua  $t$ .

Integral garis dari  $f(x, y)$  dituliskan sebagai

$$\int_C f(x, y) \, ds$$

$ds$  menyatakan bahwa pergerakan terjadi sepanjang kurva  $C$ , bukan sepanjang sumbu  $x$  atau pun sumbu  $y$ .

Panjang busur suatu kurva diberikan melalui persamaan parametrik,

$$L = \int_a^b ds, \text{ dimana } ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Simbol  $ds$  digunakan baik pada integral panjang busur maupun pada notasi integral garis. Dalam konteks integral garis, bentuk tersebut dapat dituliskan kembali dalam persamaan parametrik sebagai berikut:

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Apabila parameterisasi dituliskan dalam bentuk vektor, maka persamaan parametriknya dapat dinyatakan sebagai

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \|\vec{r}'(t)\|$$

dengan  $\|\vec{r}'(t)\|$  menyatakan norma (panjang vektor) dari turunan  $\vec{r}'(t)$ . Menggunakan notasi ini, bentuk integral garis dapat ditulis menjadi:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

### Contoh:

Jika  $\vec{A} = (3y - x)\vec{i} + (2 - 6xz)\vec{j} + (4z^2)\vec{k}$ . Hitung  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$  dari  $(0,0,0)$  sampai  $(1,1,1)$  menyusuri lintasan C yaitu garis lurus yang menghubungkan  $(0,0,0)$  dan  $(1,1,1)$ .

### Penyelesaian:

#### Cara 1.

Garis lurus yang menghubungkan titik  $(0,0,0)$  dengan  $(1,1,1)$  dapat dituliskan dalam bentuk parametrik sebagai berikut:  
 $x = t, y = t, z = t$ .

Parameter  $t$  digunakan sama untuk ketiga variabel karena sepanjang garis tersebut,  $x, y$  dan  $z$  berubah secara seragam, yakni masing-masing bertambah dari 0 hingga 1.

Jika sebuah garis lurus yang menghubungkan dua titik tidak memiliki perubahan yang sama pada setiap koordinatnya, maka dalam integral garis dapat digunakan parameterisasi dengan variabel  $x, y$  dan  $z$  secara berbeda. Sebagai contoh, integral garis dari vektor posisi

$$\vec{A} = (3y - x)\vec{i} + (2 - 6xz)\vec{j} + (4z^2)\vec{k}$$

dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \\ &= \int_0^1 (3y - x) dx + \int_0^1 (2 - 6xz) dy + \int_0^1 (4z^2) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (3t - t)dt + \int_0^1 (2 - 6t^2)dt + \int_0^1 (4t^2)dt \\
&= \int_0^1 (2t + 2 - 2t^2)dt \\
&= t^2 + 2t - \frac{2}{3}t^3 \Big|_0^1 \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

**Cara 2.**

Dari soal di atas dapat pula diselesaikan dengan persamaan (2) yaitu

$$C: r(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}; 0 \leq t \leq 1$$

dengan demikian  $x(t) = t, y(t) = t, z(t) = t$

$$\begin{aligned}
A(r(t)) &= A(x(t), y(t), z(t)) \\
&= (3y(t) - x(t))\vec{i} + (2 - 6x(t)z(t))\vec{j} + (4[z(t)]^2)\vec{k} \\
&= (3t - t)\vec{i} + (2 - 6t^2)\vec{j} + (4t^2)\vec{k}
\end{aligned}$$

dan

$$r'(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\int_a^b A(r(t)) \cdot r'(t) dt = \\
&= \int_0^1 [(3t - t)\vec{i} + (2 - 6t^2)\vec{j} + (4t^2)\vec{k}] [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] dt \\
&= \int_0^1 [(3t - t) + (2 - 6t^2) + (4t^2)] dt \\
&= \int_0^1 (2t + 2 - 2t^2) dt \\
&= t^2 + 2t - \frac{2}{3}t^3 \Big|_0^1 \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

### C. Rangkuman

Integral garis dari  $f(x, y)$  dituliskan sebagai

$$\int_C f(x, y) ds$$

atau

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

atau

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan penyelesaian

$$\int_C x^2 z dx - yx^2 dy + 3xz dz$$

dimana  $C$  adalah garis lurus dari  $(0,0,0)$  sampai  $(1,1,0)$  kemudian ke  $(1,1,1)$ . **(skor 50)**

2. Tentukan penyelesaian

$$\int_C x^2 y dx + xy^2 dy + 2yz dz$$

dimana  $C$  adalah garis lurus dari  $(0,0,0)$  sampai  $(0,1,1)$  kemudian ke  $(1,1,1)$ . **(skor 50)**

#### Pembahasan:

1. Kita diminta menghitung integral garis bentuk:

$$\int_C x^2 z dx - yx^2 dy + 3xz dz$$

dengan  $C$  adalah kurva lintasan yang terdiri dari dua segmen garis lurus:

a. Segmen 1: dari  $A = (0,0,0)$  ke  $B = (1,1,0)$

b. Segmen 2: dari  $B = (1,1,0)$  ke  $C = (1,1,1)$

(skor 10)

Integral ini adalah integral garis terhadap vektor medan:

$$\vec{F}(x, y, z) = \langle x^2 z, -x^2 y, 3xz \rangle, \text{ dan } d\vec{r} = \langle dx, dy, dz \rangle$$

Maka:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C x^2 z \, dx - x^2 y \, dy + 3xz \, dz$$

Kita akan menghitung dua bagian integral secara terpisah dan kemudian jumlahkan.

**Segmen 1: dari  $(0, 0, 0)$  ke  $(1, 1, 0)$**

Parametrik:

$$\vec{r}_1(t) = \langle t, t, 0 \rangle, t \in [0, 1]$$

Turunannya:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

Evaluasi  $\vec{F}$  pada  $\vec{r}_1(t)$ :

$$\vec{F} = \langle t^2 \cdot 0, -t^2 \cdot t, 3t \cdot 0 \rangle = \langle 0, -t^3, 0 \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \cdot 1 + (-t^3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -t^3$$

Integral segmen 1:

$$\int_0^1 (-t^3) dt = -\left[ \frac{t^4}{4} \right] \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

(skor 15)

**Segmen 2: dari  $(1, 1, 0)$  ke  $(1, 1, 1)$**

Parametrik:

$$\vec{r}_2(t) = \langle 1, 1, t \rangle, t \in [0, 1]$$

Turunannya:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Evaluasi  $\vec{F}$  pada  $\vec{r}_2(t)$ :

$$\vec{F} = \langle 1^2 \cdot t, -1^2 \cdot 1, 3 \cdot 1 \cdot t \rangle = \langle t, -1, 3t \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = t \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3t \cdot 1 = 3t$$

Integral segmen 2:

$$\int_0^1 3t \, dt = \left[ \frac{3t^2}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

(skor 15)

**Total Integral**

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\text{Segmen 1}) + (\text{Segmen 2}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \text{ (skor 10)}$$

**Jawaban akhir:**  $\frac{5}{4}$

2. Kita ingin menghitung integral garis berikut:

$$\int_C x^2 y \, dx + xy^2 \, dy + 2yz \, dz$$

dengan  $C$  adalah lintasan dua segmen garis lurus:

a. Dari  $A = (0,0,0)$  ke  $B = (0,1,1)$

b. Dari  $B = (0,1,1)$  ke  $C = (1,1,1)$

(skor 10)

Integral ini adalah bentuk:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ dengan } \vec{F}(x, y, z) = \langle x^2 y, xy^2, 2yz \rangle$$

**Segmen 1: dari  $(0, 0, 0)$  ke  $(0, 1, 1)$**

**Parametrik:**

$$\vec{r}_1(t) = \langle 0, t, t \rangle, t \in [0, 1]$$

**Turunan:**

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \langle 0, 1, 1 \rangle$$

Evaluasi  $\vec{F}$ :

$$x = 0, y = t, z = t \Rightarrow \vec{F} = \langle 0, 0, 2t^2 \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} = 0 + 0 + 2t^2 \cdot 1 = 2t^2$$

Integral segmen 1:

$$\int_0^1 2t^2 dt = \left[ \frac{2t^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \text{ (skor 15)}$$

**Segmen 2: dari (0, 1, 1) ke (1, 1, 1)**

**Parametrik:**

$$\vec{r}_2(t) = \langle t, 1, 1 \rangle, t \in [0, 1]$$

**Turunan:**

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

Evaluasi  $\vec{F}$ :

$$x = t, y = 1, z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \langle t^2 \cdot 1, t \cdot 1^2, 2 \cdot 1 \cdot 1 \rangle = \langle t^2, t, 2 \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} = t^2 \cdot 1 + t \cdot 0 + 2 \cdot 0 = t^2$$

Integral segmen 2:

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ (skor 15)}$$

**Total Integral:**

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1. \text{ (skor 10)}$$

**Jawaban akhir: 1**



Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB 11

## TEOREMA GREEN

### A. Pendahuluan

Materi Teorema Green dibangun berdasarkan konsep integral garis, sehingga penguasaan integral garis sangat diperlukan. Dengan mempelajari materi ini, Anda diharapkan dapat memahami dan menerapkan Teorema Green dalam menyelesaikan masalah.

Capaian pembelajaran yang diharapkan adalah:

1. Kemampuan menjelaskan dan menggunakan Teorema Green;
2. Keterampilan menghitung dengan Teorema Green.

### B. Materi

#### 1. Definisi Teorema Green

Jika  $R$  adalah suatu daerah tertutup dalam bidang  $xy$  yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana  $C$ ,  $M$  dan  $N$  adalah fungsi-fungsi kontinu dari  $x$  dan  $y$  yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam  $R$ , maka

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

Jika  $\mathbf{A}$  menyatakan medan gaya yang bekerja pada suatu partikel dengan  $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ , maka integral garis tertutup  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  menyatakan **usaha** yang dilakukan ketika

partikel tersebut bergerak sepanjang lintasan tertutup C. Secara lebih rinci, integral tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

yang menyederhana menjadi

$$= \oint_C Mdx + Ndy$$

Dengan menggunakan Teorema Green, maka usaha yang dilakukan adalah

$$= \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

(Dawkins, 2025; Marsden & Tromba, 2012)

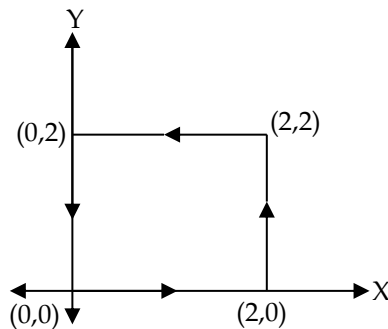
Dengan demikian, selain dihitung melalui integral garis, besarnya usaha yang dilakukan juga dapat ditentukan menggunakan Teorema Green.

### Contoh

Hitunglah  $\oint_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$  di mana C adalah suatu bujur sangkar dengan titik sudut  $(0, 0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,2)$ ,  $(2,0)$ .

### Pembahasan:

Gambar daerah yang dimaksud adalah sebagai berikut.



$$M = x^2 - xy^3 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - xy^3)}{\partial y} = -3xy^2 \rightarrow -\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2$$

$$N = y^2 - 2xy \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(y^2 - 2xy)}{\partial x} = -2y$$

Berdasarkan Teorema Green,

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

Maka

$$\begin{aligned} & \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial(y^2 - 2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - xy^3)}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^2 (-2y + 3xy^2) dydx \\ &= \int_0^2 (-y^2 + xy^3) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^2 (-4 + 8x) dx \\ &= -4x + 4x^2 \Big|_0^2 \\ &= -8 + 16 = 8 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \oint_C [(x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy] = 8$$

### C. Rangkuman

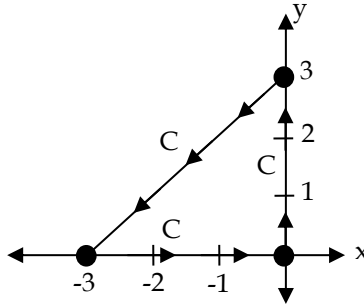
Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang  $xy$  yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C, M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari  $x$  dan  $y$  yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam R, maka

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

#### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Andaikan  $C$  adalah batas dari segitiga dengan titik-titik sudut  $(0,0)$ ,  $(1,2)$ , dan  $(0,2)$ . maka hitunglah  $\int_C 4x^2y \, dx + 2y \, dy$ . (skor 25)
2. Dengan menggunakan Teorema Green, untuk  $P = y$  dan  $Q = x$ , maka  $\oint_{(1,2)}^{(5,6)} (y \, dx + x \, dy) = \dots$  (skor 25)
3. Diketahui  $\oint_C (xy^2 + x^2) \, dx + (4x - 1) \, dy$ , dimana  $C$  seperti pada gambar berikut. (skor 50)



Hitung integral garisnya:

- a. Secara langsung
- b. Menggunakan Teorema Green.

#### Pembahasan:

1. Berdasarkan soal akan dihitung integral garis:

$$\int_C 4x^2y \, dx + 2y \, dy$$

dengan  $C$  adalah **batas tertutup** dari segitiga dengan titik sudut:

$$A = (0,0)$$

$$B = (1,2)$$

$$C = (0,2)$$

dan lintasannya berarah **positif** (berlawanan arah jarum jam).

### Gunakan Teorema Green

Karena  $C$  adalah kurva tertutup bidang, kita bisa menggunakan Teorema Green:

$$\oint P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA . \text{ (skor 5)}$$

dengan:

a.  $P(x, y) = 4x^2y$

b.  $Q(x, y) = 2y$

(skor 5)

Hitung turunannya:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial P}{\partial y} = 4x^2$$

Jadi,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 4x^2 = -4x^2 . \text{ (skor 5)}$$

### Hitung integral area:

Sekarang kita integralkan  $-4x^2$  di dalam daerah segitiga  $R$  dengan titik:  $(0,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(0,2)$

### Tentukan batas daerah $R$ :

Daerah  $R$  adalah segitiga dengan titik:

a.  $(0,0)$

b.  $(1,2)$

c.  $(0,2)$

Segitiga ini dapat dijelaskan dengan  $x \in [0,1]$

Untuk setiap  $x$ ,  $y \in [2x, 2]$

Karena garis dari  $(0,0)$  ke  $(1,2)$  adalah  $y = 2x$

$$\begin{aligned} \iint_R (-4x^2) dA &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (-4x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (-4x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 (-4x^2 y) \Big|_{2x}^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (-8x^2 + 8x^3) dx \\
&= -\frac{8}{3}x^3 + 2x^4 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}. \text{ (skor 10)}
\end{aligned}$$

Jawaban akhir:  $-\frac{2}{3}$

## 2. Langkah 1: Terapkan Teorema Green

Bentuk integral:

$$\oint_C (y \, dx + x \, dy) = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

dengan:

$$P(x, y) = y$$

$$Q(x, y) = x$$

(skor 5)

Turunan parsial:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Maka:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 1 - 1 = 0$$

(skor 10)

## Langkah 2: Evaluasi integral ganda

Teorema Green menyatakan bahwa

$$\oint P \, dx + Q \, dy = \oint (x^2 + y) \, dx + (xy) \, dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

dengan

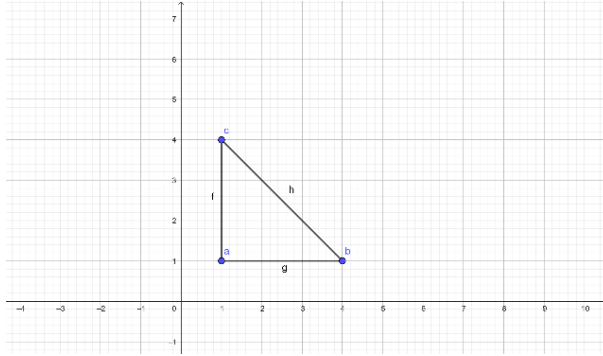
$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = y - 1$$

maka

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R (y - 1) \, dA$$

### Langkah 3: menentukan batas integral ganda

Daerah  $R$  adalah segitiga dengan titik-titik  $(1,1)$ ,  $(4,1)$  dan  $(1,4)$ . Segitiga ini terletak pada garis  $x = 1$  sampai  $x = 4$  dan  $y$  berkisar dari  $y = 1$  dan  $y = 5 - x$ .



### Langkah 4: menghitung integral ganda

$$\iint_R (y-1) dA = \int_1^4 \int_1^{5-x} (y-1) dy dx$$

#### Hitung:

Integral dalam (terhadap  $y$ ):

$$\int_1^{5-x} (y-1) dy = \left[ \frac{(y-1)^2}{2} \right]_1^{5-x} = \frac{(5-x-1)^2}{2} = \frac{(4-x)^2}{2}$$

Integral luar (terhadap  $x$ ):

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{(4-x)^2}{2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^4 (16 - 8x + x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ 16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{64}{3} - \left( 12 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{64}{3} - \frac{37}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{27}{3} \right) = \frac{27}{6} \end{aligned}$$

(skor 10)

Jawaban akhir:  $\frac{27}{6}$



3. Kurva yang terbentuk adalah persegi panjang dengan batas:

Kiri:  $x = 0$

Kanan:  $x = 2$

Bawah:  $y = 0$

Atas:  $y = 1$

Sehingga:

C: persegi panjang dengan  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$

**Diberikan integral garis:**

$$\oint_C (xy^2 + x^2) dx + (4x - 1)dy$$

dengan:

$$P(x, y) = xy^2 + x^2, Q(x, y) = 4x - 1$$

**Bagian a: Hitung secara langsung**

Karena C adalah **persegi panjang**, kita hitung integral garis di sepanjang 4 sisi:

- a. Sisi bawah:  $y = 0, x: 0 \rightarrow 2$**

$$dy = 0$$

$$dx \neq 0$$

$$P = x(0)^2 + x^2 = x^2$$

Integral:

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \text{ (skor 5)}$$

- b. Sisi kanan:  $x = 2, y: 0 \rightarrow 1$**

$$dx = 0$$

$$dy \neq 0$$

$$Q = 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$$

Integral:

$$\int_0^1 7 dy = 7(1 - 0) = 7. \text{ (skor 5)}$$

- c. Sisi atas:  $y = 1, x: 2 \rightarrow 0$  (arah negatif)**

$$dy = 0$$

$$dx = -dx$$

$$P = x(1)^2 + x^2 = x + x^2$$

Integral:

$$-\int_0^2 (x + x^2) dx = -\left(\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] \Big|_0^2\right). \text{ (skor 5)}$$

Hitung:

$$= -\left(\frac{4}{2} + \frac{8}{3}\right) = -\left(\frac{6}{3} + \frac{8}{3}\right) = -\frac{14}{3}$$

d. Sisi kiri:  $x = 0$ ,  $y: 1 \rightarrow 0$  (arah negatif)

$$dx = 0$$

$$dy = -dy$$

$$Q = 4(0) - 1 = -1$$

Integral:

$$-\int_0^1 (-1) dy = \int_0^1 1 dy = 1. \text{ (skor 5)}$$

**Total integral garis langsung:**

$$\frac{8}{3} + 7 + \left(-\frac{14}{3}\right) + 1 = 6. \text{ (skor 5)}$$

**Bagian b: Dengan Teorema Green**

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Hitung turunan:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (4x - 1) = 4$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy^2 + x^2) = 2xy$$

(skor 5)

Maka:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - 2xy$$

(skor 5)

**Integral ganda:**

$$\iint_R (4 - 2xy) dA = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 (4 - 2xy) dy dx$$

(skor 5)

**Hitung:**

Integral dalam (terhadap  $y$ ):

$$\int_0^1 (4 - 2xy) dy = [4y - xy^2] \Big|_0^1 = 4(1) - x(1)^2 = 4 - x$$

**(skor 5)**

Integral luar (terhadap  $x$ ):

$$\int_0^2 (4 - x) dx = \left[ 4x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^2 = 4(2) - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6$$

**(skor 5)**

Jawaban akhir: 6

### **E. Terapan pada Geogebra**

Langkah-langkah menyelesaikan masalah Teorema Green pada GeoGebra:

**1. Lihat soal pada contoh yang disajikan, buka GeoGebra - Calculator Suite**

**2. Masukkan:**

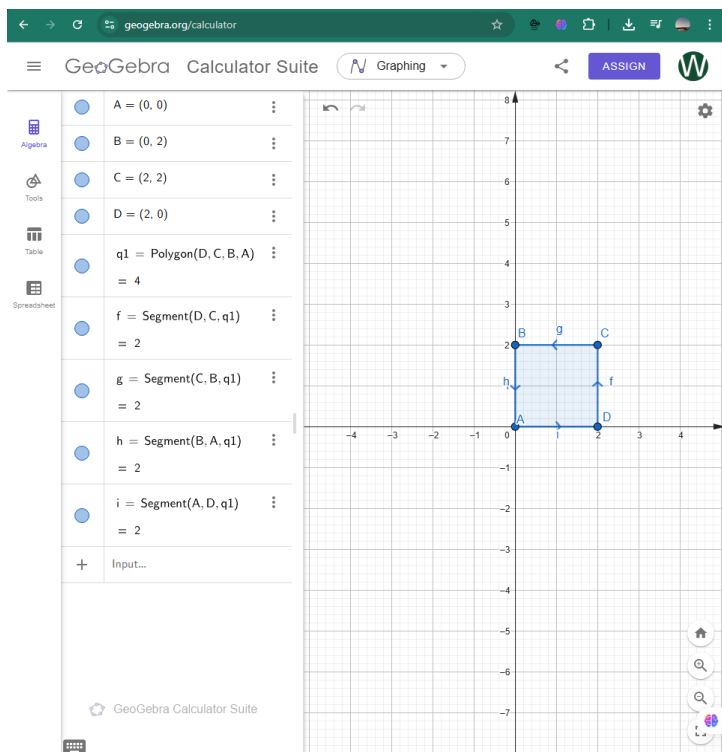
$$A = (0, 0)$$

$$B = (0, 2)$$

$$C = (2, 2)$$

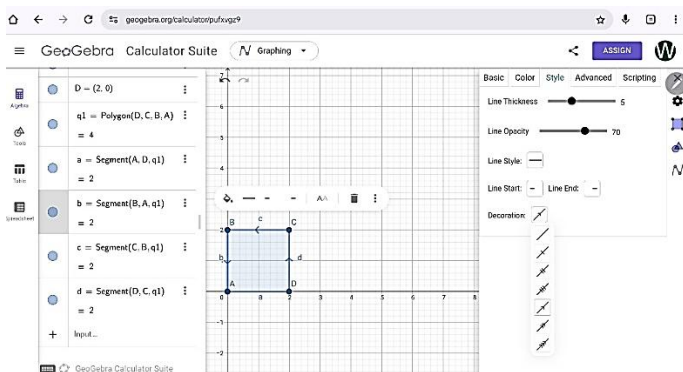
$$D = (2, 0)$$

$$\text{Polygon}(D, C, B, A)$$



Untuk menambahkan arah pada setiap segmen garis, lakukan hal berikut:

- Klik salah satu segmen garis pada gambar
- Klik opsi 'style'
- Klik 'decoration' kemudian pilih dekorasi dengan anak panah



### 3. Masukan fungsi $M(x, y)$ dan $N(x, y)$

Pada kolom "input", ketik:

$$M(x, y) = x^2 - xy^3$$

$$N(x, y) = y^2 - 2xy$$

### 4. Hitung Turunan Parsial dan Integral

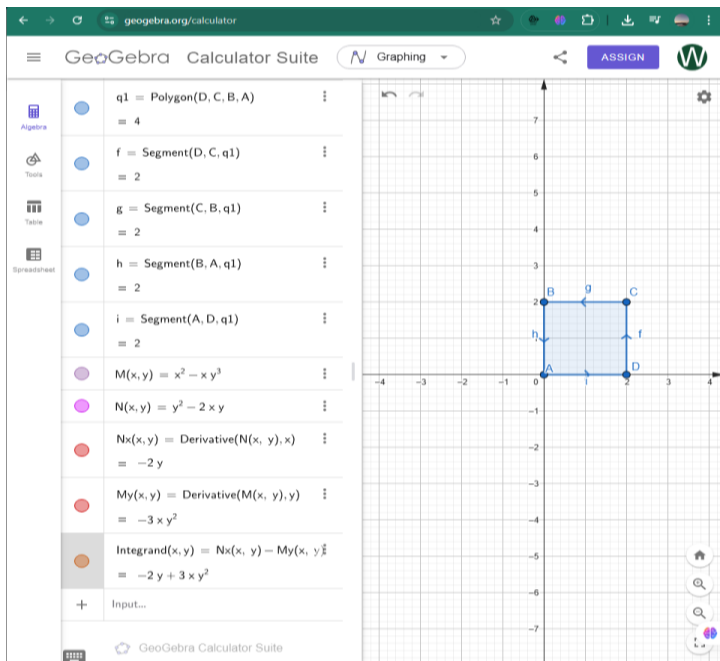
Masukkan turunan parsial  $M$  terhadap  $x$  dan turunan  $N$  terhadap  $y$ , dengan ketik:

$$M_y(x, y) = \text{Derivative}(M(x, y), y)$$

$$N_x(x, y) = \text{Derivative}(N(x, y), x)$$

$$\text{Integrand}(x, y) = N_x(x, y) - M_y(x, y)$$

$$\begin{aligned} \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial(y^2 - 2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - xy^3)}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$



## 5. Hitung Integral Ganda

Untuk menghitung integral ganda buka tautan *double-integral calculator*:

<https://www.geogebra.org/m/n3gsnbdy>.

Masukan fungsi integrand  $(x, y) = -2y + 3xy^2$

Perhatikan  $R$  adalah persegi  $[0,2] \times [0,2]$  sehingga batas-batas untuk integral dimasukan sebagai berikut:

$$= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^2 (-2y + 3xy^2) dy dx$$

The screenshot shows the GeoGebra Double-Integral Calculator interface. At the top, the browser address bar shows the URL <https://www.geogebra.org/m/n3gsnbdy>. The GeoGebra logo and a search bar are visible. The title of the applet is "Double-Integral Calculator". Below the title, the author is listed as "Feras Awad" and the topic as "Definite Integral, Integral Calculus". A note states: "NOTE: This applet just calculates what the user asks. It does not automatically transform the Type I region to Type II and vice versa. Be careful when you choose the region type and the limits of the double Integral. Sometimes the results are not expressed in the exact explicit form but in numerical form." The main input area shows the function  $f(x, y) = -2y + 3xy^2$ . Under the "Region:" label, the "Rectangular" option is selected with a checked checkbox, while "Type I" and "Type II" are unchecked. The limits for the rectangular region are set to x from 0 to 2 and y from 0 to 2. The resulting integral expression is displayed as  $\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) dy dx = 8$ . At the bottom, there are links for "New Resources", "Discover Resources", and "Discover Topics".

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB 12

## TEOREMA DIVERGENSI

### A. Pendahuluan

Kalkulus vektor memuat keterkaitan penting antara fluks suatu medan vektor dengan sifat divergensinya pada suatu wilayah. Teorema Divergensi, yang juga dikenal sebagai Teorema Gauss, menyatakan hubungan antara integral permukaan dari medan vektor dengan integral volume dari divergensinya.

Teorema ini berperan besar di bidang fisika, khususnya pada Hukum Gauss di elektromagnetisme serta pada mekanika fluida. Pemahaman terhadap teorema ini memungkinkan analisis medan tiga dimensi dilakukan lebih efisien, sebab integral permukaan dapat digantikan oleh integral volume.

Setelah mempelajari bab ini, pembaca diharapkan mampu menguasai konsep-konsep yang berkaitan dengan divergensi. Capaian pembelajaran khusus meliputi:

1. Menjelaskan makna konseptual dan interpretasi geometris dari Teorema Divergensi.
2. Menghitung divergensi suatu medan vektor beserta fluks melalui permukaan tertutup.
3. Menerapkan Teorema Divergensi dalam bentuk integral untuk menyederhanakan perhitungan medan.
4. Menganalisis persoalan di bidang fisika maupun teknik yang melibatkan konsep divergensi dan fluks.



## B. Materi

### 1. Definisi Teorema Divergensi

Jika  $\vec{F} = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$  adalah medan vektor kontinu dan terdiferensialkan dengan baik di suatu wilayah  $V$  dengan permukaan penutup  $S$ , maka:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

(Apostol, 1999; Stewart, 2016).

Dengan:

a.  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

b.  $\vec{n}$  adalah vektor satuan normal keluar dari permukaan  $S$

### 2. Interpretasi Geometris dan Fisik

a. **Interpretasi Geometris:** Divergensi menggambarkan seberapa cepat volume lokal dari suatu medan vektor berubah.

b. **Interpretasi Fisik:** Jika  $\vec{F}$  merepresentasikan aliran fluida, maka nilai divergensi yang positif menunjukkan adanya sumber (fluida mengalir keluar), sedangkan nilai divergensi yang negatif menandakan adanya serapan atau lubang (fluida mengalir masuk).

### 3. Syarat Berlaku Teorema

- Medan vektor  $\vec{F}$  terdiferensialkan kontinu pada seluruh volume  $V$  dan permukaan  $S$ .
- Permukaan  $S$  harus **tertutup dan terorientasi ke luar**.

### 4. Contoh Divergensi

Misal  $\vec{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$ , maka:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

**Contoh Soal Divergensi:**

a. Diketahui

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

Tentukan  $\text{div } \vec{F}$ 

b. Diketahui

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Tentukan  $\text{div } \vec{F}$ **Pembahasan:**a.  $\vec{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ , maka

$$M(x, y, z) = x^2, N(x, y, z) = y^2, \text{ dan } P(x, y, z) = z^2$$

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \\ &= 2x + 2y + 2z\end{aligned}$$

b.  $\vec{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , maka

$$M(x, y, z) = xy, N(x, y, z) = -\frac{1}{2}y^2, \text{ dan } P(x, y, z) = z$$

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{1}{2}y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} \\ &= y - y + 1 = 1\end{aligned}$$

### C. Rangkuman

Misalkan

$\vec{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  sebuah medan vektor dan terdapat turunan parsial  $\frac{\partial M}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial y}$ , dan  $\frac{\partial P}{\partial z}$  maka divergensi didefinisikan.

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Teorema Divergensi menghubungkan integral volume dari divergensi suatu medan vektor dengan integral permukaan dari fluks medan tersebut.

Teorema ini hanya berlaku pada permukaan tertutup dan medan vektor yang terdiferensialkan kontinu.

Sangat bermanfaat dalam menyederhanakan perhitungan dan memahami perilaku aliran di dalam suatu volume.

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Gunakan Teorema Divergensi untuk menghitung fluks dari medan vektor  $\vec{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$  keluar dari permukaan bola dengan jari-jari  $R$  yang berpusat di titik asal. **(skor 50)**
2. Diberikan  $\vec{F}(x, y, z) = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$ , hitung fluks keluar melalui permukaan kubus dengan sisi panjang 1 dan sudut di titik  $(0,0,0)$ . **(skor 50)**

#### Pembahasan:

1. a. Hitung Divergensi

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3. \text{ **(skor 20)**}$$

- b. Gunakan Integral Volume

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = 3 \cdot \text{volume bola} = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3. \\ \text{ **(skor 20)**}$$

- c. Jadi, fluks keluar dari permukaan bola adalah  $4\pi R^3$ . (**skor 5**)

2. a. Hitung Integral Volume

$$\begin{aligned} \iiint_V (2x + 2y + 2z) \, dV &= \\ &= 2(\iiint_V x \, dV + \iiint_V y \, dV + \iiint_V z \, dV) . \text{ (skor 10)} \end{aligned}$$

Karena simetri:

$$\begin{aligned} \iiint_V x \, dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \\ \text{(skor 30)} \end{aligned}$$

Total:

$$2 \cdot \left( 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = 3 . \text{ (skor 10)}$$

Jadi, fluks keluar adalah **3**

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

# BAB 13 | TEOREMA STOKES

## A. Pendahuluan

Teorema Stokes merupakan salah satu pilar utama dalam kalkulus vektor yang menghubungkan integral garis dengan integral permukaan. Pernyataan teorema ini adalah bahwa integral garis suatu medan vektor sepanjang kurva tertutup setara dengan integral permukaan dari rotasi (curl) medan tersebut pada permukaan yang dibatasi oleh kurva itu (Marsden & Tromba, 2012; Weir et al., 2014).

Signifikansi teorema ini terletak pada kemampuannya menjelaskan kaitan antara perubahan lokal medan vektor melalui rotasi dengan sirkulasi global di sepanjang batas permukaan. Penerapannya sangat luas, mulai dari analisis medan elektromagnetik hingga kajian dinamika fluida. Setelah mempelajari pokok bahasan ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan konsep dan makna geometris Teorema Stokes serta interpretasinya dalam fenomena fisik;
2. Menghitung curl dari suatu medan vektor serta menggunakannya pada integral permukaan;
3. Memanfaatkan Teorema Stokes untuk mempermudah perhitungan integral garis maupun integral permukaan;
4. Menganalisis keterkaitan antara rotasi medan vektor dengan sirkulasi serta arah orientasi kurva batas.

## B. Materi

### 1. Pernyataan Teorema Stokes

Apabila  $\vec{F}$  adalah medan vektor yang terdiferensialkan dengan baik pada suatu permukaan halus  $S$  yang dibatasi oleh kurva tertutup  $C$ , maka integral garis medan tersebut di sepanjang  $C$  dapat dituliskan sebagai integral permukaan dari rotasi ( $\nabla \times \vec{F}$ ) terhadap vektor normal permukaan  $\vec{n}$  pada  $S$ . Hubungan ini dirumuskan melalui Teorema Stokes sebagai berikut:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

(Marsden & Tromba, 2012).

Dengan:

- $\vec{F}$ : medan vektor terdiferensialkan,
- $C$ : kurva tertutup yang orientasinya sesuai dengan arah tangan kanan terhadap permukaan  $S$ ,
- $S$ : permukaan halus yang dibatasi oleh  $C$ ,
- $\vec{n}$  vektor normal satuan permukaan  $S$ .
- $\nabla \times \vec{F}$  adalah curl (rotasi) dari  $\vec{F}$ ,

Konsep Curl:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

### 2. Interpretasi Geometris dan Fisik

- Geometris: Teorema Stokes menyatakan bahwa total sirkulasi (integral garis) medan vektor pada suatu kurva tertutup setara dengan akumulasi rotasi lokal (curl) pada permukaan yang dibatasi oleh kurva tersebut (Marsden & Tromba, 2012; Weir et al., 2014).
- Fisik: Dalam konteks fisika, teorema ini dimanfaatkan untuk menggambarkan fenomena seperti pusaran fluida atau medan magnet yang terbentuk mengelilingi arus listrik.

### 3. Langkah Penyelesaian Menggunakan Teorema Stokes

Tentukan medan vektor  $\vec{F}$ , kurva batas  $C$ , dan permukaan  $S$ ; Hitung  $\nabla \times \vec{F}$ ; Hitung integral permukaan dari  $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$ ; Bandingkan hasil dengan integral garis  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  bila diperlukan.

Contoh soal:

- Terapkan Teorema Stokes untuk menghitung integral garis  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , dengan  $\vec{F}(x, y, z) = \langle -y, x, 0 \rangle$ , dan  $C$  adalah kurva lingkaran  $x^2 + y^2 = 1$  di bidang  $z = 0$ , berorientasi positif (berlawanan arah jarum jam bila dilihat dari atas).
- Diberikan  $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$   
Kurva  $C$  adalah batas dari segitiga dengan simpul di  $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$  pada bidang  $z = 0$ , berorientasi positif.  
Hitung  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

#### Pembahasan:

- Tentukan Curl:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle$$

#### Pilih permukaan $S$ :

Bidang  $z = 0$ , cakram unit  $x^2 + y^2 \leq 1$

#### Normal permukaan $\vec{n} = \hat{k}$ , maka:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2$$

#### Hitung integral permukaan:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S 2 dS = 2 \cdot \text{luas cakram} = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi;$$

- $\nabla \times \vec{F} = \langle -1, -1, -1 \rangle$   
 $S$ : segitiga di bidang  $z = 0$ , maka  $\vec{n} = \langle 0, 0, 1 \rangle$   
 $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = -1$   
Luas segitiga  $= \frac{1}{2}$   
 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S -1 dS = -\frac{1}{2}$



### C. Rangkuman

1. **Teorema Stokes** menjalin hubungan antara integral garis dan integral permukaan dari rotasi (curl) suatu medan vektor.
2. Teorema ini berperan penting dalam fisika maupun teknik karena dapat mempermudah perhitungan sirkulasi.
3. Syarat penerapannya adalah medan vektor harus terdiferensialkan dengan baik, sedangkan permukaan yang digunakan harus halus serta dibatasi oleh kurva tertutup.

### D. Latihan/Tugas

Silahkan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Diberikan  $\vec{F}(x, y, z) = \langle yz, xz, xy \rangle$  dan  $C$  adalah batas permukaan kuadran pertama dari lingkaran  $x^2 + y^2 = 1$  pada bidang  $z = 1$ , orientasi positif. Hitung  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . **(skor 30)**
2. Diberikan  $\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$  dan  $C$  adalah kurva batas persegi sisi 2 pada bidang  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , arah berlawanan jarum jam dari arah sumbu  $x$  positif. Hitung  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . **(skor 30)**
3. Diberikan  $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$ . Kurva  $C$  adalah lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  di bidang  $z = 0$ , arah berlawanan jarum jam. Hitung  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . **(skor 40)**

#### Pembahasan:

1.  $\nabla \times \vec{F} = \langle x - x, y^2 - y, z - z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$ . **(skor 20)**

Maka  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . **(skor 10)**

2. **Diberikan:**

Medan vektor:

$$\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$$

Kurva  $C$ : batas persegi sisi 1 pada bidang  $x = 0$ , dengan:

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

Arah lintasan: berlawanan arah jarum jam dilihat dari arah sumbu-  $x$  positif, artinya arah lintasan sesuai orientasi permukaan menghadap arah  $+x$ .

### Gunakan Teorema Stokes

Teorema Stokes menyatakan:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$$

Kita perlu:

- Hitung  $\nabla \times \vec{F}$
- Hitung  $\hat{n}$  dan elemen luas  $dS$
- Evaluasi integral permukaan

### Langkah 1: Hitung rotasi (curl)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y & x \end{vmatrix}$$

Hitung komponen:

- $\hat{i}: \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$
- $\hat{j}: -(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial z}) = -(1 - 1) = 0$
- $\hat{k}: \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 0 = 0$   
 $\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$   
 (skor 20)

### Langkah 2: Substitusi ke Teorema Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{0} \cdot \hat{n} dS = 0$$

(skor 10)

Jawaban akhir: 0

3. Kita mempunyai  $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$   
 Kurva  $C$  adalah lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  di bidang  $z = 0$ ,  
 orientasi **berlawanan jarum jam** dilihat dari arah sumbu  $z$   
 positif.

### Gunakan Teorema Stokes

Teorema Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$$

#### Langkah 1: Hitung $\text{curl } \nabla \times \vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \quad (\text{skor 10})$$

Hitung komponen:

- a.  $\hat{i}: \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} = 0 - 1 = -1$   
 b.  $\hat{j}: -\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) = -(1 - 0) = -1$   
 c.  $\hat{k}: \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

(skor 5)

Sehingga:

$$\nabla \times \vec{F} = \langle -1, -1, -1 \rangle$$

#### Langkah 2: Tentukan $\vec{n}$

Permukaan  $S$  adalah lingkaran di bidang  $z = 0$ , orientasi  
 positif berarti  $\vec{n} \langle 0, 0, 1 \rangle$ . (skor 5)

#### Langkah 3: Hitung $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \langle -1, -1, -1 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = -1 \quad (\text{skor 5})$$

**Langkah 4: Luas lingkaran**

Lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  memiliki jari-jari  $r = 2$ , sehingga luasnya:

$$Luas = \pi r^2 = \pi(2^2) = 4\pi. \text{ (skor 5)}$$

**Langkah 5: Integral permukaan**

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = (-1)(4\pi) = -4\pi. \text{ (skor 10)}$$

**Jawaban akhir:**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4\pi$$

Sesudah mempelajari bab ini, cobalah melakukan refleksi singkat agar Anda dapat menilai sendiri sejauh mana pemahaman Anda terhadap materi yang dipelajari.

Berilah tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

| No | Pernyataan Refleksi                                                               | Sudah                    | Belum                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1  | Saya sudah mengerti tujuan pembelajaran pada bab ini.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2  | Saya bisa menjelaskan pokok-pokok konsep dengan jelas dan runtut.                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3  | Saya mampu memahami langkah-langkah dari contoh soal yang diberikan.              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4  | Saya dapat mengerjakan soal latihan tanpa harus melihat kunci jawaban.            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5  | Saya bisa menghubungkan materi ini dengan contoh dalam kehidupan sehari-hari.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6  | Saya merasa cukup siap mengikuti ujian atau tes yang berkaitan dengan materi ini. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### **Petunjuk interpretasi:**

Jika Anda memilih “*Sudah*” pada lima pernyataan atau lebih, itu berarti pemahaman Anda terhadap materi cukup baik. Jika belum, coba pelajari kembali bagian yang masih kurang dikuasai dan mintalah bantuan dosen atau teman belajar.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adams, R. A., & Essex, C. (2010). *Calculus: A Complete Course* (G. Bennett, C. Sullivan, M. Ranadive, M. A. Blair, & V. Adams, Eds.; 7th ed.). Pearson Canada.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (D. Dietz, E. Keohane, B. Pearson, C. Welsh, K. Weinstein, & S. Goldstein, Eds.; 10th ed.). John Wiley & Sons, Inc. <https://3lihandam69.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/10/calculus-10th-edition-anton.pdf>
- Apostol, T. M. . (1999). *Calculus: Vol. II* (Second). John Wiley & Sons. <https://theswissbay.ch/pdf/Gentoomen%20Library/Maths/Calculus/Tom%20Apostol%20-%20Calculus%20Vol.2%20-%20Multi-Variable%20Calculus%20and%20Linear%20Algebra%20with%20Applications.pdf>
- Ariawan, R., & Zetriuslita, Z. (2023). Implementasi Model Problem Based Learning dan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis dalam Bahan Ajar Kalkulus. *Jurnal Cendekia : Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), 503–515. <https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i1.2073>
- Budhi, W. S. (1996). *Kalkulus Peubah Banyak*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.
- Dawkins, P. (2025, June 22). *Calculus III*. <https://Tutorial.Math.Lamar.Edu/Classes/Calciiii/Calciiii.aspx>.
- Istikomah, E. (2022). *Kalkulus 1* (E. Istikomah, Ed.). Universitas Islam Riau (UIR) Press. <https://repository.uir.ac.id/24838/1/BUku%20Kalkulus%201%20dan%20HAKI.pdf>
- Leithold, L. (1972). *The Calculus with Analytic Geometry* (Second). Harper & Row. <https://ilide.info/doc-viewer-v2>

- Marsden, J. E. ., & Tromba, Anthony. (2012). *Additional Content for Vector Calculus* (Sixth). W.H. Freeman and Co.  
<https://users.math.msu.edu/users/magyarp/math254h/M&T-Supplement.pdf>
- Muzakir, U. (2018). *Kalkulus II* (1st ed.). Bandar Publishing, Anggota IKAPI. [https://repository.bbg.ac.id/bitstream/764/1/Kalkulus\\_II.pdf](https://repository.bbg.ac.id/bitstream/764/1/Kalkulus_II.pdf)
- Patrick J. (2012, June). *Finding a Taylor Polynomial to Approximate a Function, Ex 1*. YouTube.
- Purcell, E. J., & Varberg, D. (1987). *Calculus ( Ninth Edition ) - Varberg, Purcell, Rigdon* (I. N. Susila & B. G. Kartasasmita, Trans.; fifth). Bandung: Erlangga.  
[https://spada.uns.ac.id/pluginfile.php/146458/mod\\_resource/content/1/Calculus%20%28%20Ninth%20Edition%20%29%20-%20Varberg%2C%20Purcell%2C%20Rigdon.pdf](https://spada.uns.ac.id/pluginfile.php/146458/mod_resource/content/1/Calculus%20%28%20Ninth%20Edition%20%29%20-%20Varberg%2C%20Purcell%2C%20Rigdon.pdf)
- Soedijono, B. (2008). *Kalkulus III (BMP): Vol. ketiga* (E. R. Palupi, Ed.; kesatu). Universitas Terbuka.
- Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (K. Yownes & TECHarts, Eds.; eighth). Cengage Learning.  
<https://www.mymathcloud.com/api/download/modules/AP-Calculus/Textbooks/Calculus%20Stewart.pdf?id=149258416>
- Warsito. (2020). *Kalkulus III (BMP)* (S. A. Farihati, E. Herlinawati, & I. Rosyid, Eds.; Kedua, Vol. 1). Universitas Terbuka.
- Weir, M. D. ., Hass, Joel., & Thomas, G. B. . (2014). *Thomas' Calculus: Early Transcendentals: based on the original work by George B. Thomas, Jr. Massachusetts Institute of Technology* (13th ed.). Pearson.  
[https://rodrigopacios.github.io/mrpacios/download/Thomas\\_Calculus.pdf](https://rodrigopacios.github.io/mrpacios/download/Thomas_Calculus.pdf)

## TENTANG PENULIS

**Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.** merupakan dosen Program Studi Matematika FMIPA Universitas Bale Bandung (Unibba). Keahliannya di bidang analisis dan pembelajaran matematika berfokus pada desain pembelajaran berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR) serta pemanfaatan GeoGebra dalam kalkulus dan geometri. Ia aktif menulis karya ilmiah dan menjabat sebagai Penanggung Jawab Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan (JRMST).

**Siti Dwi Rahayu Septiani, S.Pd., M.Pd.** adalah dosen Matematika Unibba dengan keahlian pada persamaan diferensial dan strategi pembelajaran inovatif. Ia aktif menulis artikel ilmiah, menjadi tim redaksi JRMST, dan berperan dalam Unit Penjaminan Mutu FMIPA.

**Cecep Suwanda, S.Si., M.Kom.** merupakan dosen Informatika Unibba dengan latar belakang matematika dan ilmu komputer. Keahliannya meliputi komputasi, pemrograman, dan teknologi pendidikan, terutama pengembangan perangkat lunak pembelajaran berbasis GeoGebra.

**Dr. Wulan Nurul Kamilah, S.Pd., M.Si.** adalah dosen Matematika Unibba dengan keahlian di bidang pemodelan keuangan syariah, optimisasi numerik, dan analisis data. Beliau anggota editor JRMST.

**Fadli Azis, S.Si., M.Mat.** dosen Matematika Unibba, ahli di bidang analisis, aljabar, dan pemodelan matematika berbasis GeoGebra, serta menjabat sebagai Ketua Editor JRMST.

Kelima penulis berkolaborasi menyusun buku ini untuk menghadirkan pembelajaran kalkulus peubah banyak berbantuan **GeoGebra**.