



Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.

KALKULUS PEUBAH BANYAK

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left(\frac{\partial (y^2 - 2xy)}{\partial x} - \frac{\partial (x^2 - xy^3)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_R (-2y + 3xy^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2x}^{2x} (-2y + 3xy^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2x}^{2x} (-4x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2x}^{2x} (-4x^2) dy dx \\ \text{div } \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned}$$

Kalkulus Peubah Banyak

UU No. 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan Sifat Hak Cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i. Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv. Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Kalkulus Peubah Banyak

Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Penulis : Dr. Dini Andiani, S.Si., M.Pd.
Desain Cover : Dwi Novidiantoko
Sumber : (cybermagician) www.shutterstock.com
Tata Letak : Joko W
Proofreader : M. Royfan A.

Ukuran:
x, 130 hlm., Uk.: 15.5x23 cm

ISBN:
978-634-01-1419-5

Cetakan Pertama:
September 2025

Hak Cipta 2025 pada Penulis
Copyright © 2025 by Deepublish Publisher
All Right Reserved

PENERBIT DEEPUBLISH
(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)

Anggota IKAPI (076/DIY/2012)
Jl. Rajawali, Gg. Elang 6, No. 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl. Kaliurang Km. 9,3 – Yogyakarta 55581
Telp./Faks : (0274) 4533427
Website : www.penerbitdeepublish.com
www.deepublishstore.com
E-mail : cs@deepublish.co.id

Hak cipta dilindungi undang-undang.

Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

Isi di luar tanggung jawab percetakan.

KATA PENGANTAR PENERBIT

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat rahmat dan karunia-Nya, buku ***Kalkulus Peubah Banyak*** dapat terwujud dan hadir di tengah-tengah masyarakat. Sebagai penerbit yang berkomitmen untuk mencerdaskan, membahagiakan, dan memuliakan umat manusia, kami merasa terhormat dapat berkontribusi dalam penyebaran ilmu pengetahuan dan pendidikan melalui penerbitan karya ini.

Buku ini berisi materi lengkap untuk menguasai kalkulus multivariabel. Anda akan dibimbing dari konsep fungsi peubah banyak, limit, dan derivatif parsial hingga derivatif fungsi implisit dan nilai ekstrem bersyarat. Pembahasan berlanjut ke integral lipat dan kalkulus vektor tingkat lanjut, termasuk Teorema Green, Divergensi, dan Stokes. Setiap bab disusun secara terstruktur, dilengkapi uji pemahaman, memastikan pemahaman mendalam tentang kalkulus multivariabel untuk aplikasi di bidang matematika.

Terima kasih dan penghargaan terbesar kami sampaikan kepada penulis, Dr. Dini Andiani S.Si., M.Pd., yang telah memberikan kepercayaan, perhatian, dan kontribusi penuh demi kesempurnaan buku ini. Kami berharap karya ini dapat memberikan kontribusi yang signifikan dalam perkembangan keilmuan di Indonesia. Semoga buku ini tidak hanya menjadi sumber informasi yang berharga, tetapi juga menginspirasi pembacanya untuk terus berkembang dan berkontribusi dalam membangun bangsa yang lebih baik.

Hormat Kami,

Penerbit Deepublish

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Tuhan Pencipta dan Pemilik Ilmu atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga Kami menyelesaikan penyusunan buku ajar ini. Buku ajar ***Kalkulus Peubah Banyak*** ini diharapkan dapat menjadi bagian dari referensi ilmu yang akan mengaplikasikan khasanah kemuliaan ilmu. Sasaran pengguna buku ini adalah para mahasiswa yang ingin memahami pengetahuannya tentang Kalkulus Peubah Banyak. Besar harapan Kami, buku ini akan memperlancar tujuan Kami dalam menghasilkan *output* mahasiswa yang sesuai dengan kurikulum yang berlaku.

Kami menyampaikan beberapa konsep dasar terkait Kalkulus Peubah Banyak. Buku ini terdiri atas beberapa bab yang saling berkesinambungan. Awal konsep yang dikemukakan adalah Fungsi Peubah Banyak, Limit, dan Kekontinuan, serta Derivatif Parsial.

Harapan kami, mahasiswa dan pembaca dapat memanfaatkan buku ini sebagai tambahan wawasan untuk pemahaman yang lebih utuh. Akhirnya, kami sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini dan mohon maaf atas segala khilaf.

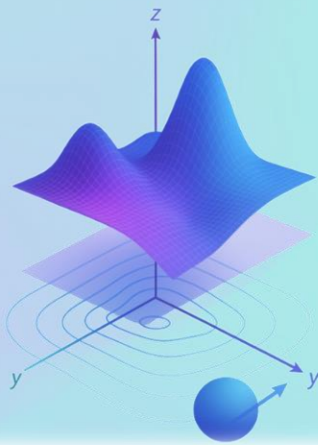
Dr. Dini Andiani, S.Si, M.Pd

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR PENERBIT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
BAB I	FUNGSI PEUBAH BANYAK 1
A.	Fungsi Peubah Banyak 2
B.	<i>Domain</i> $D(f)$ dan <i>Range</i> $R(f)$ 3
C.	Fungsi Eksplisit dan Fungsi Implisit 4
D.	Apa yang Kita Pelajari? 6
E.	Uji Pemahaman Materi 6
BAB II	LIMIT DAN KEKONTINUAN 10
A.	Limit 11
B.	Kekontinuan 11
C.	Apa yang Kita Pelajari? 15
D.	Uji Pemahaman Materi 16
BAB III	DERIVATIF PARSIAL 20
A.	Derivatif Parsial 21
B.	Lemma Dasar 21
C.	Apa yang Kita Pelajari? 24
D.	Uji Pemahaman Materi 25
BAB IV	DERIVATIF FUNGSI IMPLISIT 30
A.	Derivatif Fungsi Implisit 31
B.	Determinan Jacobian 31
C.	Apa yang Kita Pelajari? 35
D.	Uji Pemahaman Materi 36
BAB V	NILAI EKSTREM BERSYARAT 41
A.	Nilai Ekstrem Bersyarat 42
B.	Apa yang Kita Pelajari? 45
C.	Uji Pemahaman Materi 46

BAB VI	FORMULA DAN DERET TAYLOR.....	55
	A. Formula dan Deret Taylor	56
	B. Apa yang Kita Pelajari?	61
	C. Uji Pemahaman Materi.....	62
BAB VII	INTEGRAL FUNGSI BERNILAI VEKTOR	66
	A. Pengertian Fungsi Bernilai Vektor	67
	B. Contoh Fungsi Bernilai Vektor.....	67
	C. Operasi pada Fungsi Bernilai Vektor	67
	D. Pengaplikasian Fungsi Bernilai Vektor	68
	E. Apa yang Kita Pelajari?	68
	F. Uji Pemahaman Materi.....	69
BAB VIII	INTEGRAL LIPAT DUA.....	74
	A. Integral Lipat Dua.....	75
	B. Apa yang Kita Pelajari?	78
	C. Uji Pemahaman Materi.....	78
BAB IX	INTEGRAL LIPAT TIGA	86
	A. Integral Lipat Tiga	87
	B. Apa yang Kita Pelajari?	89
	C. Uji Pemahaman Materi.....	89
BAB X	INTEGRAL GARIS DENGAN PARAMETER.....	94
	A. Integral Garis dengan Parameter	95
	B. Apa yang Kita Pelajari?	99
	C. Uji Pemahaman Materi.....	99
BAB XI	TEOREMA GREEN	105
	A. Teorema Green	106
	B. Apa yang Kita Pelajari?	108
	C. Uji Pemahaman Materi.....	108
BAB XII	TEOREMA DIVERGENSI	116
	A. Definisi Teorema Divergensi.....	117
	B. Makna Geometris dan Fisik.....	117
	C. Syarat Berlaku Teorema	117
	D. Contoh Divergensi.....	117

E.	Apa yang Kita Pelajari?.....	118
F.	Uji Pemahaman Materi.....	119
BAB XIII	TEOREMA STOKES	121
A.	Pernyataan Teorema Stokes	122
B.	Interpretasi Geometris dan Fisik	122
C.	Langkah Penyelesaian Menggunakan Teorema Stokes	123
D.	Apa yang Kita Pelajari?.....	124
E.	Uji Pemahaman Materi.....	124
DAFTAR PUSTAKA.....		129



BAB I

FUNGSI PEUBAH BANYAK

Bab ini membahas fungsi peubah banyak. Pada saat pembaca mempelajari bahan ajar ini, diasumsikan telah menguasai materi-materi terkait fungsi satu peubah. Secara bahasa umum, pembaca sudah menguasai Kalkulus I dan Kalkulus II.

Setelah mempelajari bab ini, para pembaca diharapkan mampu menjelaskan pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi dua peubah atau lebih. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bahan ajar ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian fungsi dua peubah
2. Mampu menentukan domain dan jelajah fungsi dua peubah
3. Mampu menjelaskan fungsi dua peubah
4. Mampu menjelaskan pengertian fungsi 3, 4, ..., dan n peubah
5. Mampu membuat contoh-contoh fungsi 3, 4, ..., dan n peubah
6. Mampu menentukan fungsi sebagai fungsi eksplisit
7. Mampu menentukan fungsi sebagai fungsi implisit

A. Fungsi Peubah Banyak

Sebelum masuk ke dalam pembahasan fungsi dua peubah, sebaiknya kita ulas kembali tentang fungsi satu peubah untuk mengingat materi perihai ini sebelumnya. Ingatkah tentang $y = f(x)$? Inilah bentuk umum dari fungsi satu peubah. Peubah yang satu tersebut yaitu x . Domain dari fungsi $y = f(x)$ terdiri dari semua nilai x yang mungkin dan menghasilkan bilangan *real*. Ini artinya, domain dari fungsi satu peubah merupakan suatu interval dari nilai-nilai yang berupa garis atau berdimensi satu (Anton *et al.*, 2012; Stewart, 2016).

Fungsi dua peubah jika didefinisikan adalah sebagai berikut (Anton *et al.*, 2012; Stewart, 2016).

Fungsi dua peubah adalah aturan yang mengaitkan setiap pasangan terurut (x, y) dengan tepat satu $z = f(x, y)$.

Domain dari suatu fungsi disebut juga dengan istilah daerah definisi atau daerah asal, sedangkan kodomain sering disebut juga dengan istilah daerah kawan, sementara itu, untuk *range*, disebut juga dengan daerah hasil atau daerah nilai atau jelajah.

Fungsi dua peubah merupakan sebuah fungsi yang apabila disubstitusikan suatu input (x, y) pada fungsi tersebut maka akan dihasilkan tepat satu *output* yang berupa bilangan *real*. Domain dari fungsi dua variabel, $z = f(x, y)$, merupakan suatu daerah yang berupa dua dimensi dan terdiri dari semua pasangan koordinat (x, y) yang dapat kita substitusikan ke dalam fungsi sehingga diperoleh nilai fungsi (Anton *et al.*, 2012; Stewart, 2016).

Pada fungsi $z = f(x, y)$, peubah x dan peubah y disebut peubah bebas dan z disebut sebagai peubah terikat (peubah tak bebas). Fungsi z ini disebut sebagai fungsi 2 peubah. Jika suatu fungsi terdiri dari tiga peubah, maka disebut sebagai fungsi 3 peubah.

Contoh fungsi 2 peubah:

- a) $f(x, y) = x - y$
- b) $f(x, y) = x^2 - xy$
- c) $f(m, n) = 3m^3 + 2n^2 - m + n - 1$

Contoh fungsi 3 peubah:

a) $f(p, q, r) = \frac{1}{2}pq^3 - qr^2$

b) $f(x, y, z) = x^2z - xyz^2$

c) $f(m, n, p) = m^3 - 2n^2p + 5$

B. Domain $D(f)$ dan Range $R(f)$

Daerah asal atau domain disimbolkan dengan $D(f)$ sementara daerah nilai disimbolkan dengan $R(f)$.

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 | f(x, y) \in R\}$$

$$R(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in D_f\}$$

Kita akan menentukan $D(f)$ dan $R(f)$ dari fungsi berikut.

Contoh

Tentukan domain $D(f)$ dan $R(f)$ dari fungsi-fungsi berikut.

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

b) $f(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$

Pembahasan:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + 2y^2 \in R^2\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2\}$$

$$R(f) = \{f(x, y) = x^2 + 2y^2 \geq 0 | (x, y) \in R^2\}$$

b) $f(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid \frac{1}{2}\sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \in R^2\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | 16 - 4x^2 - y^2 \geq 0\}$$

$$= \{(x, y) \in R^2 | 4x^2 + y^2 \leq 16\}$$

$$= \left\{ (x, y) \in R^2 \mid \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1 \right\}$$

$$R(f) = \{f(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \geq 0 \mid (x, y) \in R^2; \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1\}$$

c) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$
 $\ln(4 - x^2 - 4y^2)$ terdefinisi hanya ketika
 $4 - x^2 - 4y^2 > 0$ atau $\frac{1}{4}x^2 + y^2 < 1$ sehingga
 $D(f) = \{(x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 + y^2 < 1\}$
 $R(f) = \{f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2) > 0 \mid (x, y) \in R^2; \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$

C. Fungsi Eksplisit dan Fungsi Implisit

Beberapa fungsi terdiri dari fungsi peubah tak bebas ($f(x, y)$) dan peubah x dan y yang letaknya terpisah pada ruas yang berlainan. Fungsi ini dinamakan **fungsi eksplisit**. Bentuk umum fungsi ini dituliskan sebagai $f(x, y) = F$, di mana F merupakan fungsi yang terdiri atas peubah bebas x dan atau y (Purcell & Varberg, 1987).

Jika pada suatu fungsi, antarpeubah tak bebas ($f(x, y)$) dengan peubah bebas x dan atau y terletak pada ruas yang sama, tidak dapat dipisah pada ruas yang berlainan, maka disebut **fungsi implisit**. Bentuk umum fungsi ini dituliskan sebagai $f(x, y) = 0$ (Marsden & Tromba, 2012; Purcell & Varberg, 1987).

Contoh fungsi eksplisit dan fungsi implisit.

- a) Contoh fungsi eksplisit
 - a. $2x^5 + y^7 = x^5$
 - b. $xw - y^2w - 3 = 0$
 - c. $x^3y^2z - y^2z + z = -7$
- b) Contoh fungsi implisit
 - a. $2x^5 + y^7 = 5xy$ atau $2x^5 + y^7 - 5xy = 0$
 - b. $x^3y^2 - 7xz^5y = x^2 + z^3$
 - c. $y^3 \cos(3z - 7x) = 1 + z \sin(8xy)$

Pembahasan:

a) Pada contoh fungsi eksplisit tersebut,

$$a. \quad 2x^5 + y^7 = x^5 \Leftrightarrow y^7 = x^5 - 2x^5 \Leftrightarrow y^7 = -x^5$$

Tampak bahwa peubah x dan peubah y dapat dipisah pada ruas yang berlainan. Oleh karenanya, persamaan

$2x^5 + y^7 = x^5$ merupakan **fungsi eksplisit**.

$$b. \quad xw - y^2w - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y^2w+3}{w}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{xw-3}{w}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{3}{x-y^2}$$

Peubah x terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah y dan w , peubah y terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah x dan peubah w , peubah w terpisah dengan peubah x dan peubah y . Oleh karenanya, persamaan $xw - y^2w - 3 = 0$ merupakan **fungsi eksplisit**.

$$c. \quad x^3y^2z - y^2z + z = -7 \Leftrightarrow x^3 = \frac{y^2z-z-7}{y^2z}$$

atau

$$y^2z(x^3 - 1) + z = -7 \Leftrightarrow y^2z = \frac{-7-z}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{-7-z}{z(x^3-1)}$$

atau

$$z(x^3y^2 - y^2 + 1) = -7 \Leftrightarrow z = \frac{-7}{x^3y^2 - y^2 + 1}$$

Peubah x terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah y dan z , peubah y terpisah pada ruas yang berlainan dengan peubah x dan peubah z , peubah z terpisah dengan peubah x dan peubah y . Oleh karenanya, persamaan $x^3y^2z - y^2z + z = -7$ merupakan **fungsi eksplisit**.

b) Pada contoh fungsi implisit tersebut,

$$a. \quad 2x^5 + y^7 = 5xy \Leftrightarrow 2x^5 + y^7 - 5xy = 0$$

$$b. \quad x^3y^2 - 7xz^5y = x^2 + z^3$$

$$c. \quad y^3 \cos(3z - 7x) = 1 + z \sin(8xy)$$

Semua persamaan a, b, dan c tidak dapat dipisahkan pada ruas yang berlainan.

D. Apa yang Kita Pelajari?

Fungsi dua peubah adalah aturan yang mengaitkan setiap pasangan terurut (x, y) dengan tepat satu $z = f(x, y)$.

Domain disimbolkan dengan $D(f)$ dan range disimbolkan dengan $R(f)$.

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 | f(x, y) \in R\}$$

$$R(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in D_f\}$$

Fungsi **eksplisit** dan fungsi **implisit** ditentukan berdasarkan peubah tak bebas dan peubah bebasnya yang terletak pada ruas yang sama atau berlainan.

E. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan domain $D(f)$ dan *range* $R(f)$ dari fungsi-fungsi berikut. (Skor 30)

a) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$

b) $f(x, y) = x^2y$ untuk $x \geq 0$

2. Periksalah apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi **eksplisit** atau fungsi **implisit**. (Skor 30)

a) Fungsi $y^3 - 7xy = 3x^2 + 5$

b) Fungsi $x^3y^2 - 7x^3y^2z^5 = x^3y^2 + y^2z^5$

c) Fungsi $z \sin(x - y) - y^3z = x^3z$

3. Tuliskan contoh fungsi dua peubah, tiga peubah dan lima peubah masing-masing lima. **(Skor 40)**

Pembahasan:

1. Domain $D(f)$ dan *range* $R(f)$ dari fungsi-fungsi berikut.

a) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$
 $x^2 + y^2 + z^2 > 9$, **(skor 8)**
 (skor

$$D(f) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}} \in R\}$$

$$= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 9 \geq 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\} \text{ **(skor 6)**}$$

$$R(f) = \{f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}} \geq 0 \mid (x, y, z) \in R^3; |x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}$$

(skor 6)

b) $f(x, y) = x^2y$ untuk $x \geq 0$
 $D(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2y \in R\}$ **(skor 6)**
 $R(f) = \{f(x, y) = x^2y \mid (x, y) \in R^2\}$ **(skor 4)**

2. Fungsi tersebut merupakan fungsi:

- a) Implisit **(skor 10)**
 b) Eksplisit **(skor 10)**
 c) Eksplisit **(skor 10)**

3. Tuliskan contoh fungsi dua peubah, tiga peubah dan lima peubah masing-masing lima.

Contoh fungsi dua peubah (x_1, x_2 peubah bebas dan y peubah tak bebas): **(skor 10)**

- 1) $y = x_1x_2$
- 2) $y = x_1 + x_2$
- 3) $y = \frac{x_1}{x_2}$
- 4) $y = x_1 - x_2$
- 5) $y = x_1x_2 + x_1^2$

Contoh fungsi tiga peubah (x_1, x_2, x_3 peubah bebas dan y peubah tak bebas): **(skor 15)**

- 1) $y = x_1x_2 - x_3$
- 2) $y = x_1 + x_2x_3$
- 3) $y = \frac{x_1}{x_2x_3}$
- 4) $y = x_1x_3 - x_2$
- 5) $y = x_1x_2 + x_3^2$

Contoh fungsi lima peubah (x_1, x_2, x_3 peubah bebas dan y peubah tak bebas): **(skor 15)**

- 1) $x_4y = x_1x_2 - x_3x_5$
- 2) $y - x_5 = \frac{x_1}{x_4} + x_2x_3$
- 3) $y = \frac{x_1x_3}{x_2x_4}$
- 4) $\ln(x_2y) - x_3 = x_1e^{x_4} - x_5$
- 5) $y = x_1x_2 + x_3^2 - \cos(x_4x_5^2)$

Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

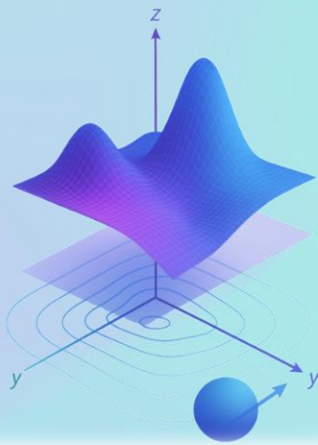
Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB II

LIMIT DAN KEKONTINUAN

Pada bahasan limit dan kekontinuan, para pembaca diharapkan mampu menjelaskan pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi dua peubah atau lebih terkait kekontinuan dan derivatif. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian limit dan kekontinuan fungsi peubah banyak;
2. Mampu menghitung limit fungsi dua dan tiga peubah;
3. Mampu menjelaskan pengertian kekontinuan fungsi;
4. Mampu memeriksa kekontinuan fungsi di suatu titik.

A. Limit

Sebelum membahas limit fungsi dua variabel atau lebih, kita perhatikan terlebih dahulu limit fungsi dengan satu variabel.

Kita katakan bahwa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dengan syarat $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$. Ingatlah bahwa $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ merupakan limit kanan dan hanya nilai x yang lebih besar dari a yang kita lihat. Sedangkan $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ merupakan limit kiri dan hanya nilai x yang kurang dari a yang kita lihat.

Dengan kata lain, kita akan memperoleh $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ jika $f(x)$ mendekati L saat kita bergerak menuju $x = a$ (tanpa membiarkan $x = a$) dari kedua sisi. Dalam hal ini, terdapat dua arah yang dapat kita ambil untuk menuju $x = a$.

Kita akan meninjau fungsi dua variabel dengan cara yang sama, walaupun pada kasus ini, kita akan melibatkan beberapa hal. Kita akan memperoleh limit dari fungsi $f(x, y)$ di mana x mendekati a dan y mendekati b . Hal ini dapat kita tuliskan dalam berbagai bentuk. Bentuk standar penulisannya adalah

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$$

atau

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$$

Penggunaan penulisan dalam bahan ajar ini akan menggunakan penulisan bentuk yang kedua. Menentukan limit dari sebuah fungsi dua peubah sama artinya dengan menentukan nilai dari $f(x, y)$ saat titik (x, y) mendekati (a, b) termasuk titik (a, b) itu sendiri (Adams & Essex, 2010; Anton *et al.*, 2012; Apostol, 1999; Budhi, 1996; Stewart, 2016).

B. Kekontinuan

Yang akan kita bahas adalah kekontinuan fungsi dua peubah. Masih ingatkah kalian dengan kekontinuan pada fungsi satu peubah? Adakah

syarat yang harus dipenuhi agar suatu fungsi satu peubah kontinu? Mari kita ingat kembali materi kalkulus sebelumnya.

Fungsi f kontinu di $x = a$ jika dan hanya jika semua syarat berikut terpenuhi:

1. $f(a)$ ada;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada; dan
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka f dikatakan diskontinu atau tidak kontinu di $x = a$.

Bagaimana definisi kekontinuan fungsi dua peubah? Berikut adalah definisinya.

Misalkan f fungsi dua variabel dan (a, b) titik di R^2 . Fungsi f kontinu di titik (x_0, y_0) jika dan hanya jika semua syarat berikut terpenuhi:

1. $f(a, b)$ ada;
2. $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ ada; dan
3. $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka f dikatakan diskontinu atau tidak kontinu di (a, b) .

Contoh soal limit dan kekontinuan:

- a) Tentukan nilai dari $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -2)} \frac{x-2}{xy^2} = \dots$
- b) Tentukan nilai dari $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2+y^2}{x} = \dots$

- c) Tentukan apakah limit berikut ada atau tidak, jika ada, berapakah nilainya?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} =$$

- d) Periksa, apakah $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$ kontinu di:
- $(1,0)$; dan
 - $(0,0)$

Pembahasan:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x-2}{xy^2} = \frac{1-2}{(1)(-2)^2} = -\frac{1}{4}$

- b) Sepanjang $y = mx$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + m^2x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + m^2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sepanjang $y = 0$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sepanjang $y^2 = x$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Karena nilai limit sepanjang $y = mx$ atau $y = 0$ tidak sama dengan nilai limit sepanjang $y^2 = x$, maka $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$ **tidak mempunyai limit**.

- c) Pada soal bagian ini, nilai fungsi tidak kontinu pada titik $(1, -1)$ karena bila disubstitusikan, penyebut menghasilkan nilai nol. Namun, tidak berarti bahwa nilai limit fungsi ini tidak dapat dikerjakan.

Pada soal ini, kita dapat memfaktorkan baik pembilang maupun penyebutnya seperti berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(3x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(3x-y)}{(x-y)} \end{aligned}$$

Melalui pemfaktoran pembilang dan penyebut serta membagi pembilang dan penyebut dengan faktor yang sama, limit fungsi dapat dicari. Selanjutnya, substitusikan titik $(1, -1)$ pada fungsi terakhir yang diperoleh.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(3x-y)}{(x-y)} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

- d) Kita cek semua persyaratan, apakah terpenuhi atau tidak.

a. di $(1,0)$; $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$

1. $f(1,0) = \frac{2(1)^2(0)-2}{(1)^2+(0)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2} = \frac{2(1)^2(0)-2}{(1)^2+(0)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2} = f(1,0) = -2$

Jadi, $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$ **kontinu** di $(1,0)$

b. di $(0,0)$; $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$

$$f(0,0) = \frac{2(0)^2(0)-2}{(0)^2+(0)^2} = \frac{-2}{0} = \text{tidak terdefinisi}$$

Karena salah satu syarat tidak terpenuhi, maka $f(x,y) = \frac{2x^2y-2}{x^2+y^2}$ **diskontinu** di $(0,0)$.

C. Apa yang Kita Pelajari?

Definisi kekontinuan pada fungsi satu peubah:

Fungsi f kontinu di $x = a$ jika dan hanya jika semua syarat berikut terpenuhi:

1. $f(a)$ ada;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada; dan
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka f dikatakan diskontinu atau tidak kontinu di $x = a$.

Definisi kekontinuan fungsi dua peubah:

Misalkan f fungsi dua variabel dan (a,b) titik di R^2 . Fungsi f kontinu di titik (x_0, y_0) jika dan hanya jika semua syarat berikut terpenuhi:

1. $f(a,b)$ ada;
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ ada; dan
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka f dikatakan diskontinu atau tidak kontinu di (a,b) .

D. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan nilai limit dari $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$ jika ada. **(skor 25)**
2. Tentukan nilai limit berikut. **(skor 25)**
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2-2xy}{x^2-4y^2}$ jika ada.
3. Tunjukkanlah bahwa fungsi $f(x,y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$ kontinu pada titik $(5, -3)$. **(skor 25)**
4. Jika diberikan $h(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
tentukan kontinuitas dari $h(x,y)$. **(skor 25)**

Pembahasan:

1. Sepanjang $y = mx$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + m^2x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + m^2x \\ &= 0 \quad \textbf{(skor 7)} \end{aligned}$$

Sepanjang $y = 0$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \\ &= 0 \quad \textbf{(skor 6)} \end{aligned}$$

Sepanjang $y^2 = x$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 \\ &= 1 \text{ (skor 6)}\end{aligned}$$

Karena nilai limit sepanjang $y = mx$ atau $y = 0$ tidak sama dengan nilai limit sepanjang $y^2 = x$, maka $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$ tidak mempunyai limit. (skor 6)

2.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 2xy}{x^2 - 4y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)}$$

(skor 7)

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x}{(x+2y)} \text{ (skor 6)}$$

$$= \frac{2}{(2+2(1))} \text{ (skor 6)}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (skor 6)}$$

3. $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$ kontinu pada titik $(5, -3)$

Pembahasan:

Terdapat 3 kondisi yang harus dipenuhi berdasarkan kekontinuan.

1) $f(5, -3)$ ada. (skor 7)

Hal ini benar karena domain fungsi $f(x, y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$ terdiri dari pasangan-pasangan yang mana penyebutnya tidak nol ($x + y + 1 \neq 0$). Titik $(5, -3)$ memenuhi kondisi ini. Lebih jauh lagi,

$$f(5, -3) = \frac{3(5)+2(-3)}{5+(-3)+1} = \frac{15-6}{2+1} = 3.$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (5,-3)} \frac{3x+2y}{x+y+1} \text{ ada. (skor 6)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (5,-3)} \frac{3x+2y}{x+y+1} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-3)} 3x+2y}{\lim_{(x,y) \rightarrow (5,-3)} x+y+1} \\ &= \frac{15-6}{5-3+1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (5,-3)} \frac{3x+2y}{x+y+1} = f(5,-3) \text{ (skor 6)}$$

$$3 = 3$$

Terbukti bahwa $f(x,y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$ kontinu pada titik $(5,-3)$.
(skor 6)

3. Jika diberikan $h(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Maka tentukan kontinuitas dari $h(x,y)$.

Pembahasan:

Fungsi $h(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ merupakan fungsi rasional, fungsi ini kontinu pada setiap domainnya yang dinotasikan sebagai $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$. (skor 8)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 = h(0,0)$$

(skor 9)

Oleh karenanya, h juga kontinu di $(0,0)$ sehingga fungsi $h(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ kontinu pada domain $\mathbb{R}^2$. **(skor 8)**

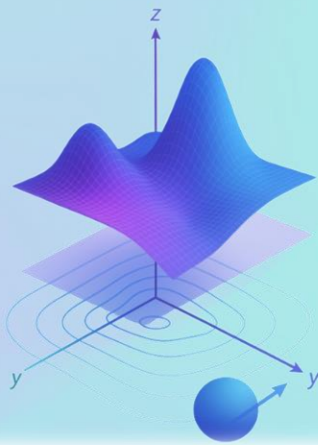
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB III

DERIVATIF PARSIAL

Pada bahasan ini, akan disampaikan mengenai derivatif parsial fungsi peubah banyak khususnya fungsi dengan dua peubah bebas. Untuk mempelajari materi ini diharapkan Anda saat ini telah menguasai materi yang berkaitan dengan derivatif yang telah disajikan dan terangkum pada matakuliah Kalkulus sebelumnya. Kompetensi yang harus Anda kuasai setelah mempelajari materi ini adalah terampil menentukan derivatif parsial fungsi peubah banyak. Oleh karena itu, pahami pengertian maupun konsep-konsep dalam materi ini dan berlatihlah mengerjakan soal-soal derivatif parsial. Capaian pembelajaran khusus setelah mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan derivatif parsial;
2. Menentukan derivatif fungsi peubah banyak.

A. Derivatif Parsial

Derivatif parsial adalah derivatif dari suatu fungsi yang memiliki beberapa variabel bebas terhadap salah satu variabel bebasnya dengan memandang variabel bebas lainnya sebagai konstanta (Muzakir, 2018; Weir *et al.*, 2014).

Simbol

Diketahui $f = f(x, y)$ adalah fungsi dengan dua peubah bebas x dan y .

Derivatif parsial $f(x, y)$ terhadap x disimbolkan dengan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k, y) - f(x, y)}{k}$$

sedangkan derivatif parsial $f(x, y)$ terhadap y disimbolkan dengan

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Derivatif parsial orde dua dari $f(x, y)$ disimbolkan dengan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

B. Lemma Dasar

Jika $z = f(x, y)$ mempunyai derivatif parsial pertama yang kontinu di *region* D , maka z mempunyai diferensial total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

atau dengan kata lain, diferensial fungsi bernilai *real* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dinyatakan dengan

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Jika diberikan fungsi bernilai *real* $u = u(x, y)$ dan $v = v(x, y)$ masing-masing terdefinisi dan mempunyai derivatif parsial terhadap x maupun y pada suatu daerah $D \subset \mathbb{R}^2$ maka berlaku sifat-sifat berikut:

- 1) $d(u + v) = du + dv$
- 2) $d(uv) = u dv + v du$
- 3) Untuk setiap $(x, y) \in D$, $v(x, y) \neq 0$, maka berlaku

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

- 4) $df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$

$$df(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

Contoh soal derivatif parsial:

- a) Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ jika diberikan

$$f(x, y) = 2xy - (1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

- b) Tentukan derivatif parsial orde dua fungsi f , jika diberikan

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$$

- c) Jika diberikan $z = \ln(x^2 + y^2)$ maka tentukan dz .

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\text{a) } \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y - \left[\frac{3}{2} (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \right] \\ &= 2y + 3x(1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2y + 3x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2x - \left[\frac{3}{2} (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2y) \right] \\ &= 2x + 3y(1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2x + 3y\sqrt{1 - x^2 - y^2}\end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2xz$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + z^2) = 2y + 0 = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2yz) = 0 + 2z = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (y^2 + 2xz) = 0 + 2x = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2y$$

c) Misalkan $u = x^2 + y^2$ sehingga $z = \ln u$

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \\ &= \frac{1}{u} 2x dx + \frac{1}{u} 2y dy = \frac{1}{u} 2(x dx + y dy) = \frac{2}{u} (x dx + y dy) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} (x dx + y dy) = 2 \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

C. Apa yang Kita Pelajari?

Derivatif parsial adalah derivatif dari suatu fungsi yang memiliki beberapa variabel bebas terhadap salah satu variabel bebasnya dengan memandang variabel bebas lainnya sebagai konstanta.

Derivatif parsial orde dua dari $f(x, y)$ disimbolkan dengan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

D. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ jika diberikan $f(x, y) = x^2 + 2y$. **(skor 10)**
2. Jika $z^3 - xz - y = 0$ maka tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$. **(skor 20)**
3. Diberikan $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.
Tentukan $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. **(skor 40)**
4. Tentukan $\frac{\partial U}{\partial x}$ dari fungsi $U = \frac{9y^2}{x-y}$. **(skor 10)**
5. Tentukan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ jika diberikan
 $f(x, y) = (2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{5}{2}} - xy^2$. **(skor 20)**

Pembahasan:

1. Jika $f(x, y) = x^2 + 2y$ maka $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$. **(skor 10)**
2. Jika $z^3 - xz - y = 0$ maka
$$\frac{\partial z^3}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - (z + x \frac{\partial z}{\partial x}) - 0 = 0$$
$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - z - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 - x) = z$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2 - x} \text{ (skor 10)}$$
$$\frac{\partial z^3}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial y} = 0$$
$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - \left(0 + x \frac{\partial z}{\partial y}\right) - 1 = 0$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 - x) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3z^2 - x} \text{ (skor 10)}$$

3. Jika $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ maka

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) (2x) \quad 2x \text{ merupakan turunan dari } x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Misal: } u = x \rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 1$$

$$v = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow v' = \frac{dv}{dx} = \left(-\frac{1}{2} \right) (2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}})$$

Saya ulangi,

$2x$ merupakan turunan terhadap x dari $(x^2 + y^2 + z^2)$ (Lihat dalil tentang aturan berantai)

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(1) + x \left(-\frac{1}{2} \right) (2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ (skor 10)}$$

Silakan coba sendiri untuk turunan selanjutnya...benarkah hasilnya sama dengan berikut ini?

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) (2y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + y \left(-\frac{1}{2} \left(2y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ (skor 10)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) (2z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z \left(-\frac{1}{2} \left(2z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ (skor 10)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &+ \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &+ \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =$$

$$= 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (3 - (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (3 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \text{(skor 10)}$$

4. Jika $U = \frac{9y^2}{x-y}$ maka

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (-1)9y^2(x-y)^{-2}(-1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-9y^2}{(x-y)^2}$$

(skor 10)

5. Jika $f(x, y) = (2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{5}{2}} - xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{5}{2} (2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}} (-2x) \right] - y^2$$

$$= \left[-5x(2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}} \right] - y^2 \quad \text{(skor 10)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\frac{5}{2} (2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}} (-4y) \right] - 2xy$$

$$= \left[-10y(2 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}} \right] - 2xy \quad \text{(skor 10)}$$

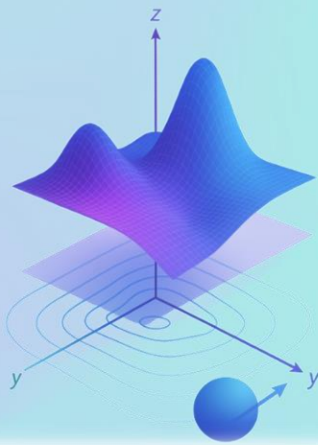
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB IV

DERIVATIF FUNGSI IMPLISIT

Pada bahasan derivatif fungsi implisit, para pembaca diharapkan mampu menjelaskan pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang berkaitan dengan derivatif fungsi implisit. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian derivatif fungsi implisit;
2. Mampu menentukan derivatif fungsi implisit;
3. Mampu menentukan derivatif fungsi implisit melalui Determinan Jacobian;

A. Derivatif Fungsi Implisit

Fungsi $z = f(x, y)$ dapat disajikan dalam bentuk $F(x, y, z) = 0$. Fungsi $F(x, y, z) = 0$ ini dinamakan fungsi implisit (Marsden & Tromba, 2012; Purcell & Varberg, 1987).

Derivatif fungsi implisit dapat digunakan untuk menentukan derivatif z terhadap peubah x dan y yaitu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}}$$

Misal:

Jika $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ maka $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$

Sedemikian hingga derivatif fungsi implisit adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} &= -2z \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}} = - \frac{2x}{-2z} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}} = - \frac{2y}{-2z} = \frac{y}{z}$$

B. Determinan Jacobian

Jacobian sering digunakan untuk menghitung turunan dari fungsi-fungsi implisit (Marsden & Tromba, 2012; Purcell & Varberg, 1987).

Apabila terdapat dua fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

Jacobian dari F dan G terhadap x dan y adalah

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

(Jacobian ini disebut determinan Jacobian derajat dua fungsi F dan G).

Serupa, apabila terdapat tiga fungsi implisit

$$F(x, y, z) = 0$$

$$G(x, y, z) = 0$$

$$H(x, y, z) = 0$$

Jacobian dari F , G dan H terhadap x , y dan z adalah

$$J = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

(Jacobian ini disebut determinan Jacobian derajat tiga fungsi F , G dan H).

Contoh soal derivatif fungsi implisit:

- a) Jika diberikan fungsi $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ maka

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} =$$

- b) Jika diberikan sistem persamaan

$$F = yu - xv \tan xyz = 0$$

$$G = y^2 u^2 + x^2 v^2 - x^2 y^2 = 0$$

maka $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \dots$.

c) Tentukan Jacobian dari $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ dan $G(x, y) = -xy$

Pembahasan:

a) Untuk $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Ingat bahwa untuk setiap $(x, y) \in D$, $v(x, y) \neq 0$, maka berlaku

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

Misal

$g(x, y) = x^2 - y^2$ maka $dg = 2x dx$ dan $dg = -2y dy$

$h(x, y) = x^2 + y^2$ maka $dh = 2x dx$ dan $dh = 2y dy$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{h(x,y) \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - g(x,y) \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}}{(h(x,y))^2} \\ &= \frac{2x(x^2+y^2) - (2x)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(4xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{h(x,y) \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - g(x,y) \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}}{(h(x,y))^2} \\ &= \frac{(-2y)(x^2+y^2) - (2y)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(-4x^2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \frac{(4xy^2)}{(x^2+y^2)^2} + y \frac{(-4x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

b) Misal

$F = yu - xv \tan xyz = 0,$

$G = y^2u^2 + x^2v^2 - x^2y^2 = 0$

$\frac{\partial F}{\partial u} = y, \frac{\partial F}{\partial v} = -x \tan xyz$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2y^2u, \frac{\partial G}{\partial v} = 2x^2v$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & -x \tan xyz \\ 2y^2u & 2x^2v \end{vmatrix}$$

$$= y(2x^2v) - 2y^2u(-x \tan xyz)$$

$$= 2x^2yv + 2y^2ux \tan xyz$$

$$= 2xy(xv + yu \tan xyz)$$

c) Jika $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ dan $G(x, y) = -xy$
Maka

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} & \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ -y & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-x) \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) - (-y) \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{-2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{-2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

C. Apa yang Kita Pelajari?

Apabila terdapat dua fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

Jacobian dari F dan G terhadap x dan y adalah

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

Apabila terdapat tiga fungsi implisit

$$F(x, y, z) = 0$$

$$G(x, y, z) = 0$$

$$H(x, y, z) = 0$$

Jacobian dari F , G dan H terhadap x , y dan z adalah

$$J = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

D. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dari $x^2 + 2xy + z^2 - xz + 2 = 0$. (skor 30)
2. Berapakah nilai Determinan Jacobian dari sistem persamaan $f(x, y) = -y^2 + x^2$, $g(x, y) = 3y^2 - x$. (skor 30)
3. Tentukan determinan jacobian jika diketahui $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. (skor 40)

Pembahasan:

1. Persamaan implisit: $x^2 + 2xy + z^2 - xz + 2 = 0$, diminta menentukan turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Karena z tidak diekspresikan secara eksplisit sebagai fungsi dari x dan y , kita gunakan **diferensiasi implisit** terhadap x , dengan menganggap bahwa $z = z(x, y)$.

Ambil turunan terhadap x dari kedua sisi:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(z^2) - \frac{d}{dx}(xz) + \frac{d}{dx}(2) = \frac{d}{dx}(0)$$

Hitung tiap turunan:

- $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
- $\frac{d}{dx}(2xy) = 2y$ (karena y dianggap konstan terhadap x)
- $\frac{d}{dx}(z^2) = 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
- $\frac{d}{dx}(xz) = z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$
- $\frac{d}{dx}(2) = 0$

(skor 20)

Substitusikan semuanya:

$$2x + 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - z - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Gabungkan dan kelompokkan suku-suku:

$$(2z - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (2x + 2y - z) = 0$$

Pindahkan $2x + 2y - z$ ke kanan:

$$(2z - x) \frac{\partial z}{\partial x} = z - 2x - 2y$$

Akhirnya, kita peroleh:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - 2x - 2y}{2z - x}$$

(skor 10)

Jawaban akhir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - 2x - 2y}{2z - x}$$

2. Diberikan sistem fungsi:

$$f(x, y) = -y^2 + x^2, g(x, y) = 3y^2 - x$$

Kita ingin mencari **determinan Jacobian**, yaitu determinan dari matriks turunan parsial dari f dan g terhadap x dan y .

Langkah 1: Bentuk Matriks Jacobian

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Hitung turunan parsial:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$
- $\frac{\partial g}{\partial x} = -1$
- $\frac{\partial g}{\partial y} = 6y$

(skor 20)

Jadi:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ -1 & 6y \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Hitung Determinan

$$\begin{aligned} \det(J) &= (2x)(6y) - (-2y)(-1) = 12xy - 2y \\ &= 2y(6x - 1) \end{aligned}$$

(skor 10)

Jawaban akhir:

$$\det(J) = 2y(6x - 1)$$

3. Kita diberikan transformasi koordinat dari koordinat polar ke kartesian:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

Kita diminta menentukan **determinan Jacobian** dari transformasi ini, yaitu:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Langkah 1: Hitung Turunan Parsial

- $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$
- $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$
- $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$
- $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$

(skor 20)

Jadi matriks Jacobian-nya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

(skor 10)

Langkah 2: Hitung Determinan

$$\det(J) = (\cos \theta)(r \cos \theta) - (-r \sin \theta)(\sin \theta) = r$$

$$= r \cos 2\theta + r \sin 2\theta = r(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$$

(skor 10)**Jawaban akhir:**

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right) = r$$

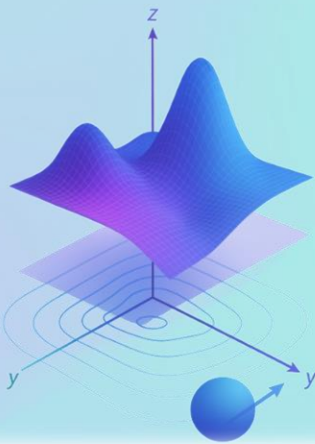
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB V

NILAI EKSTREM BERSYARAT

Pada sesi ini akan dibahas nilai ekstrem fungsi peubah banyak dan nilai ekstrem bersyarat untuk fungsi peubah banyak. Setelah mempelajari materi ini diharapkan Anda dapat menjelaskan sifat-sifat fungsi komposit untuk fungsi peubah banyak dan juga pengertian nilai ekstrem fungsi peubah banyak dan nilai ekstrem bersyarat untuk fungsi peubah banyak.

Capaian pembelajaran khusus setelah Anda mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian nilai ekstrem fungsi peubah banyak;
2. Terampil menentukan nilai ekstrem fungsi peubah banyak.

A. Nilai Ekstrem Bersyarat

Pada bab ini kita akan membahas tentang fungsi maksimum dan fungsi minimum. Penggunaan kata ekstrem ditujukan baik saat fungsi mengalami maksimum maupun minimum.

Definisi ekstrem relatif untuk fungsi dua variabel identik dengan fungsi untuk satu variabel. Misalkan $f(x, y)$ terdefinisi pada suatu daerah $\mathfrak{R}$ pada bidang xoy dengan titik $(a, b) \in \mathfrak{R}$.

1. Fungsi $f(x, y)$ dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif $f(a, b)$ di titik (a, b) jika terdapat bilangan *real* $\delta > 0$ sehingga untuk setiap titik $(x, y) \in \mathfrak{R}$ yang memenuhi

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

berlaku $f(x, y) \leq f(a, b)$

2. Fungsi $f(x, y)$ dikatakan mempunyai nilai minimum relatif $f(a, b)$ di titik (a, b) jika terdapat bilangan *real* $\delta > 0$ sehingga untuk setiap titik $(x, y) \in \mathfrak{R}$ yang memenuhi

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

berlaku $f(x, y) \geq f(a, b)$

3. Fungsi $f(x, y)$ dikatakan mempunyai nilai maksimum absolut $f(a, b)$ di titik (a, b) pada $\mathfrak{R}$ jika untuk setiap titik $(x, y) \in \mathfrak{R}$ berlaku $f(x, y) \leq f(a, b)$.

4. Fungsi $f(x, y)$ dikatakan mempunyai nilai minimum absolut $f(a, b)$ di titik (a, b) pada $\mathfrak{R}$ jika untuk setiap titik $(x, y) \in \mathfrak{R}$ berlaku $f(x, y) \geq f(a, b)$.

$f(x, y)$ terdefinisi dan terdiferensial parsial hingga orde dua pada daerah $\mathfrak{R}$, akan mencapai nilai ekstrem di titik $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$ jika

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

dan $D = B^2 - AC$ dan

- 1) mencapai nilai maksimum relatif jika $A < 0$ dan $D > 0$

2) mencapai nilai minimum relatif jika $A > 0$ dan $D > 0$

$f(x, y)$ bukan nilai ekstrim, jika $D < 0$ atau jika $D = 0$ maka uji turunan kedua ini tidak menghasilkan keputusan.

$$\text{dengan } A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \text{ dan } C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

(Anton *et al.*, 2012; Stewart, 2016)

Contoh soal nilai ekstrem bersyarat:

- Diberikan fungsi $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6x + 4y$. Tentukan titik stasioner fungsi f dan tinjau apakah fungsi f mencapai nilai ekstrim di titik tersebut.
- Tentukan nilai ekstrem fungsi f jika ada untuk $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y$

Pembahasan:

- Untuk menentukan titik stasioner diselesaikan sistem persamaan

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

diperoleh

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6x - 6$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y + 4$$

Jadi

$$6x - 6 = 0$$

$$2y + 4 = 0$$

Sistem persamaan di atas mempunyai penyelesaian $x = 1$ dan $y = -2$, sehingga titik $(1, -2)$ merupakan titik stasioner fungsi f di atas.

Selanjutnya dibandingkan nilai fungsi $f(x, y)$ di titik $(1, -2)$ dengan nilai fungsi tersebut di titik $(1 + h, -2 + k)$ dengan h dan k bilangan *real* sebarang cukup kecil.

$$f(1, -2) = -7$$

$$\begin{aligned} f(1 + h, -2 + k) &= 3(1 + h)^2 + (-2 + k)^2 - 6(1 + h) + 4(-2 + k) \\ &= 3h^2 + k^2 - 11 \end{aligned}$$

$$f(1 + h, -2 + k) - f(1, -2) = (3h^2 + k^2 - 11) + 7$$

$$= 3h^2 + k^2 - 4$$

Terlihat bahwa tanda dari $[f(1 + h, -2 + k) - f(1, -2)]$ dapat berubah dengan perubahan nilai h dan k , berarti fungsi $f(x, y)$ tidak mencapai nilai ekstrim di titik stasioner $(1, -2)$.

$$\text{b) } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 8x - 8$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y + 4$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \text{ maka}$$

$$8x - 8 = 0 \text{ dan } 2y + 4 = 0 \text{ memiliki penyelesaian } x = 1, y = -2$$

diperoleh titik stasioner fungsi $f(x, y)$ yaitu titik $(1, -2)$

selanjutnya dihitung nilai diskriminan $D = B^2 - AC = 0 - 16 = -16 < 0$

Karena $A = \frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x^2} = 8 > 0$ maka di titik stasioner $(1, -2)$ fungsi $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y$ mencapai nilai minimum relatif sebesar

$$f(1, -2) = 4(1)^2 + (-2)^2 - 8(1) + 4(-2) = -8$$

B. Apa yang Kita Pelajari?

$f(x, y)$ terdefinisi dan terdiferensial parsial hingga orde dua pada daerah $\mathfrak{R}$, akan mencapai nilai ekstrem di titik $(x_0, y_0) \in \mathfrak{R}$ jika

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

dan $D = B^2 - AC$ dan

- 1) jika $A < 0$ dan $D > 0$ maka fungsi mencapai nilai maksimum relatif di (x_0, y_0) .
- 2) jika $A > 0$ dan $D > 0$ maka fungsi mencapai nilai minimum relatif di (x_0, y_0) .
- 3) jika $D < 0$ maka (x_0, y_0) merupakan titik pelana.
- 4) jika $D = 0$ maka (x_0, y_0) mungkin merupakan sebuah maksimum relatif, maksimum relatif atau titik pelana. Perlu teknik lain untuk menentukan jenis titik kritis.

dengan $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, dan $C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$

C. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Diberikan fungsi $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$. Tentukan titik stasioner fungsi f dan tinjau apakah fungsi f mencapai nilai ekstrim di titik tersebut. **(skor 25)**
2. Diberikan fungsi $f(x, y) = -xy + 2x + y^2 + y + 1$. Tentukan titik stasioner fungsi f dan tinjau apakah fungsi f mencapai nilai ekstrem di titik tersebut. **(skor 25)**
3. Tentukan nilai ekstrem fungsi f jika ada untuk $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y$. **(skor 25)**
4. Tentukan nilai ekstrem fungsi f jika ada untuk $f(x, y) = \cos x \sin y$. **(skor 25)**

Pembahasan:

1. Kita akan mencari titik stasioner dari fungsi $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$ dan menentukan apakah titik tersebut merupakan titik ekstrem maksimum, minimum, atau *saddle point*.

Langkah 1: Cari Titik Stasioner

Titik stasioner terjadi ketika turunan parsial pertama dari fungsi terhadap masing-masing variabel sama dengan nol. Kita hitung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2x + 2y - 8$$

(skor 5)

Setarakan keduanya ke nol:

$$6x - 2y = 0 \quad (1)$$

$$-2x + 2y - 8 = 0 \quad (2)$$

(skor 2)

Langkah 2: Selesaikan Sistem Persamaan

Dari persamaan (1):

$$6x = 2y \Rightarrow y = 3x$$

(skor 2)

Substitusi ke persamaan (2):

$$-2x + 2(3x) - 8 = 0 \Rightarrow -2x + 6x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$y = 3x = 6$$

(skor 3)

Jadi, titik stasioner adalah (2,6). **(skor 1)**

Langkah 3: Uji Nilai Ekstrem

Hitung turunan kedua:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6, f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2, f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -2$$

(skor 5)

Hitung determinan matriks:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6)(2) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8$$

(skor 4)

Karena $D > 0$ dan $f_{xx} > 0$, maka titik (2,6) adalah titik minimum lokal. **(skor 3)**

Jawaban akhir:

Fungsi $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$ memiliki **titik stasioner di (2, 6)**, dan fungsi mencapai **minimum lokal** di titik tersebut.

3. Kita diberi fungsi:

$$f(x, y) = -xy + 2x + y^2 + y + 1$$

Langkah 1: Turunan Parsial Pertama

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y + 2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + 2y + 1$$

Setarakan keduanya ke nol:

$$-y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad (1)$$

$$-x + 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

Substitusi (1) ke (2):

$$-x + 2(2) + 1 = 0 \Rightarrow -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Jadi titik stasioner (5,2)

(skor 15)

Langkah 2: Uji Jenis Titik

Hitung turunan kedua:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0, f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2, f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -1$$

Determinannya:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (0)(2) - (-1)^2 = 0 - 1 = -1$$

Karena $D < 0$ dan $f_{xx} > 0$, maka titik tersebut adalah minimum lokal.

(skor 10)

Jawaban Akhir:

Karena $D < 0$, maka titik stasioner **(5,2)** adalah titik sadel, bukan titik ekstrem (minimum atau maksimum lokal).

4. Alternatif jawaban 1:

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y - 2x + 4$$

(skor 5)

$$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -2$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2$$

(skor 5)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \text{ maka}$$

$$6x - 2y = 0 \text{ dan } 2y - 2x + 4 = 0$$

memiliki penyelesaian $x = -1, y = -3$

diperoleh titik stasioner fungsi $f(x,y)$ yaitu titik $(-1, -3)$.

(skor 5)

selanjutnya dihitung nilai diskriminan

$$D = B^2 - AC = (-2)^2 - (6)(2) = 4 - 12 = -8 < 0. \text{ (skor 5)}$$

$$\text{Karena } A = \frac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial x^2} = 6 > 0$$

maka di titik stasioner $(-1, -3)$ fungsi $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y$ mencapai nilai minimum relatif sebesar

$$\begin{aligned} f(-1, -3) &= 3(-1)^2 + (-3)^2 - 2(-1)(-3) + 4(-3) = \\ &= 3 + 9 - 6 - 12 = -6 \end{aligned}$$

(skor 5)

Alternatif jawaban 2:

Untuk menentukan titik stasioner diselesaikan sistem persamaan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

diperoleh

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y - 2x + 4$$

Jadi

$$6x - 2y = 0$$

$$2y - 2x + 4 = 0$$

Sedemikian sehingga $x = -1, y = -3$

Diperoleh titik stasioner fungsi $f(x,y)$ yaitu titik $(-1, -3)$.

Selanjutnya dibandingkan nilai fungsi $f(x,y)$ di titik $(-1, -3)$ dengan nilai fungsi tersebut di titik $(-1 + h, -3 + k)$ dengan h dan k sebarang bilangan *real* cukup kecil.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= 3x^2 + y^2 - 2xy + 4y \\
f(-1, -3) &= 3(-1)^2 + (-3)^2 - 2(-1)(-3) + 4(-3) \\
&= 3 + 9 - 6 - 12 = -6 \\
f(-1 + h, -3 + k) &= \\
&= 3(-1 + h)^2 + (-3 + k)^2 - 2(-1 + h)(-3 + k) + 4(-3 + k) \\
&= 3 - 6h + 3h^2 + 9 - 6k + k^2 - 6 + 6h + 2k - 2hk - 12 + 4k \\
&= 3h^2 + k^2 - 2hk - 6
\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung

$$\begin{aligned}
f(-1 + h, -3 + k) - f(-1, -3) &= \\
&= 3h^2 + k^2 - 2hk - 6 - (-6) \\
&= 3h^2 + k^2 - 2hk \\
&= 2h^2 + k^2 - 2hk + h^2 \\
&= 2h^2 + (k - h)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa tanda dari $[f(-1 + h, -3 + k) - f(-1, -3)] \geq 0$. Ini berarti fungsi $f(x, y)$ mencapai nilai minimum relatif di **titik stasioner** $(-1, -3)$ dengan $(-1, -3) = -6$.

4. $f(x, y) = \cos x \sin y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f_x = -\sin x \sin y \\
\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f_y = \cos x \cos y
\end{aligned}$$

$f_x = -\sin x \sin y = 0$ dan $f_y = \cos x \cos y = 0$, mempunyai himpunan penyelesaian jika $\cos x = \sin y = 0$ dan $\sin x = \cos y = 0$. (**skor 10**)

Karena $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, maka $\cos x \neq 0$ dan $\sin x \neq 0$.

Untuk $\cos x = \sin y = 0$, maka

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \text{bilangan bulat}$$

$$y = m\pi, m \in \text{bilangan bulat}$$

Untuk $\sin x = \cos y = 0$, maka

$$x = n\pi, n \in \text{bilangan bulat}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \text{bilangan bulat}$$

selanjutnya dihitung nilai diskriminan

$$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx} = -\cos x \sin y$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy} = -\sin x \cos y$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy} = -\cos x \sin y$$

$$D = B^2 - AC = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \\ = (-\cos x \sin y)^2 - (-\sin x \cos y)^2$$

(skor 4)

Untuk $\cos x = \sin y = 0$,

$$D = (-\cos x \sin y)^2 - (-\sin x \cos y)^2 \\ = (0)^2 - (-\sin x \cos y)^2 \\ = -(-\sin x \cos y)^2 \\ = -(1)^2 \dots\dots\dots \text{karena } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ = -1 < 0$$

(skor 4)

Karena $D < 0$, maka semua titik saat $\cos x = \sin y = 0$ merupakan titik pelana.

$$\text{Untuk } \sin x = \cos y = 0, \quad D = (-\cos x \sin y)^2 - (-\sin x \cos y)^2 \\ = (\cos x \sin y)^2 - (0)^2 \\ = (\cos x \sin y)^2 \\ = (1)^2 \dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}\text{karena } \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ &= 1 > 0\end{aligned}$$

$$f_{xx} = -\cos x \sin y \text{ untuk } x = n\pi, n \in \text{bilangan bulat dan } y = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \text{bilangan bulat.}$$

(skor 2)

Sebagai catatan bahwa $\cos(n\pi)$ adalah
Bernilai 1 jika n anggota bilangan genap dan
bernilai -1 jika n anggota bilangan ganjil.
dan $\sin(\frac{\pi}{2} + m\pi)$ adalah
Bernilai 1 jika m anggota bilangan genap dan
bernilai -1 jika m anggota bilangan ganjil.

$$\begin{aligned}\text{Hal ini dapat dinyatakan sebagai} \\ \cos(n\pi) &= (-1)^n \text{ dan } \sin(\frac{\pi}{2} + m\pi) = (-1)^m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{xx}\left(n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right) &= -\cos(n\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) \\ &= -(-1)^n (-1)^m \\ &= (-1)^{m+n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{xx} &> 0 \text{ ketika } (m+n) \text{ ganjil} \\ f_{xx} &< 0 \text{ ketika } (m+n) \text{ genap}\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

Untuk titik $(n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$ dengan $(m+n)$ ganjil, maka titik tersebut merupakan titik minimum.

Untuk titik $(n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$ dengan $(m+n)$ genap, maka titik tersebut merupakan titik maksimum.

Untuk titik $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, m\pi\right)$, maka titik tersebut merupakan titik pelana.
(skor 5)

atau

Dengan kata lain, untuk batasan

$0 \leq x \leq \pi$ dan $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, terdapat 5 titik kritis yaitu 2 titik maksimum pada $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dan $\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, 2 titik minimum pada $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ dan $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, dan 1 titik pelana pada $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

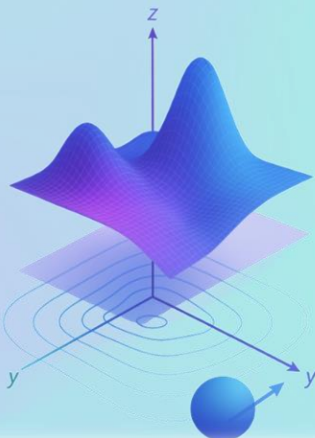
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB VI

FORMULA DAN DERET TAYLOR

Pada bahasan formula dan deret Taylor, para pembaca diharapkan mampu menjelaskan pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang berkaitan dengan formula dan deret Taylor. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian formula dan deret Taylor;
2. Mampu menentukan formula Taylor;

A. Formula dan Deret Taylor

Formula Taylor derajat $(n - 1)$ dengan suku sisa R_n dinyatakan

$$\text{dengan: } f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b)}{1!} + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b)}{2!} + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a, b)}{3!} + \dots + \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a, b)}{(n-1)!} + R_n$$

dengan

$$R_n = \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a + \theta h, b + \theta k)}{n!}$$

dengan $0 < \theta < 1$ (Adams & Essex, 2010; Apostol, 1999; Soedijono, 2008; Warsito, 2020).

Silakan disimak video mengenai Formula dan Deret Taylor berikut.

- Video Deret Taylor
(Patrick J, 2012)
<https://www.youtube.com/watch?v=WKvBJdl1qrM>
- Video Deret Taylor dan MacLaurin
<https://www.youtube.com/watch?v=dp2ovDuWhro>
- Video Deret Taylor dua variable
<https://www.youtube.com/watch?v=D8AjFhLhFvA>

Contoh formula dan deret taylor:

- Tentukan formula Taylor fungsi $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ di sekitar titik $(1, -1)$ dengan $n = 3$
- Jika diberikan fungsi $f(x, y) = \cos xy$ maka $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$ adalah ...

Pembahasan:

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{1}{xy} = x^{-1}y^{-1} \quad f(1, -1) = -1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -x^{-2}y^{-1} \quad \frac{\partial f(1,-1)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2} \quad \frac{\partial f(1,-1)}{\partial y} = -1$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(1, -1) &= h \frac{\partial f(1, -1)}{\partial x} + k \frac{\partial f(1, -1)}{\partial y} \\ &= h(1) + k(-1) = h - k \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2x^{-3}y^{-1}$$

Ini merupakan turunan kedua dari fungsi $f(x, y) = \frac{1}{xy}$, yang diperoleh dengan cara menurunkan kembali fungsi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -x^{-2}y^{-1}$ terhadap x . Karena pada soal yang ditanyakan di sekitar $(1, -1)$, maka kita substitusikan:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2x^{-3}y^{-1} \rightarrow \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = x^{-2}y^{-2}$$

Ini merupakan turunan kedua dari fungsi $f(x, y) = \frac{1}{xy}$, yang diperoleh dengan cara menurunkan fungsi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -x^{-2}y^{-1}$ terhadap y . Karena pada soal yang ditanyakan di sekitar $(1, -1)$, maka kita substitusikan:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = x^{-2}y^{-2} \rightarrow \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2x^{-1}y^{-3}$$

Ini merupakan turunan kedua dari fungsi $f(x, y) = \frac{1}{xy}$, yang

diperoleh dengan cara menurunkan fungsi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2}$

terhadap y . Karena pada soal yang ditanyakan di sekitar $(1, -1)$, maka kita substitusikan:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x^{-1}y^{-3} \rightarrow \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial y^2} = -2$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(1, -1) &= h^2 \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial y^2} \\ &= -2h^2 + 2hk - 2k^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^1 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{\partial y} &= -(1 + \theta h)^{-1}(-1 + \theta k)^{-2} \\ &= \frac{-1}{(1 + \theta h)^1(-1 + \theta k)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2x^{-3}y^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{\partial x^2} &= 2(1 + \theta h)^{-3}(-1 + \theta k)^{-1} \\ &= \frac{2}{(1 + \theta h)^3(-1 + \theta k)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} = -6x^{-4}y^{-1}$$

$$\frac{\partial^3 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{\partial x^3} = \frac{-6}{(1 + \theta h)^4(-1 + \theta k)}$$

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = -2x^{-3}y^{-2}$$

$$\frac{\partial^3 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{-2}{(1 + \theta h)^3(-1 + \theta k)^2}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2} = -2x^{-2}y^{-3}$$

$$\frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{\partial x \partial y^2} = \frac{-2}{(1+\theta h)^2(-1+\theta k)^3}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} = -6x^{-1}y^{-4}$$

$$\frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{\partial y^3} = \frac{-6}{(1+\theta h)(-1+\theta k)^4}$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta h, -1+\theta k) \\ = h^3 \frac{\partial^3 f(1+\theta h, -1+\theta k)}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)} + \frac{-6h^2k}{(1+\theta h)^3(-1+\theta k)^2} \\ + \frac{-6hk^2}{(1+\theta h)^2(-1+\theta k)^3} + \frac{-6k^3}{(1+\theta h)(-1+\theta k)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta h, -1+\theta k) \\ = \frac{-6h^3}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)} + \frac{-6h^2k}{(1+\theta h)^3(-1+\theta k)^2} \\ + \frac{-6hk^2}{(1+\theta h)^2(-1+\theta k)^3} + \frac{-6k^3}{(1+\theta h)(-1+\theta k)^4} \\ = \frac{-6[h^2(-1+\theta k)^2 + k^2(1+\theta h)^2][h(-1+\theta k) + k(1+\theta h)]}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)^4} \end{aligned}$$

Dengan demikian, formula Taylor fungsi $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ di sekitar titik

$(1, -1)$ adalah

$$\frac{1}{(1+h)(-1+k)} = -1 + (h-k) + \frac{-2h^2 + 2hk - 2k^2}{2} + R_3$$

$$= -1 + (h - k) - (h^2 - hk + k^2) + R_3$$

dengan suku sisa

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{3!} \\ &= \frac{-[h^2(-1+\theta k)^2 + k^2(1+\theta h)^2][h(-1+\theta k) + k(1+\theta h)]}{(1+\theta h)^4(-1+\theta k)^4} \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = \cos xy$ maka $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) = \dots$.

$$f(x, y) = \cos xy$$

$$f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-90) = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -y \sin xy$$

$$\frac{\partial f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x} = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin(-90) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times -1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x \sin xy$$

$$\frac{\partial f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial y} = (-1) \sin\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (-1) \sin(-90) = (-1) \times -1 = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x^2} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(-90) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1(\sin xy) + (y \cos xy)(-y)$$

$$= -\sin xy - y^2 \cos xy$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x \partial y} &= -\sin xy - y^2 \cos xy = -\sin\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin(-90) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(-90) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (0) = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial y^2} = -(1)^2 \cos\left(1 \times -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\cos(-90) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) &= h^2 \left(\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x^2}\right) + 2hk \left(\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x \partial y}\right) \\ &+ k^2 \left(\frac{\partial^2 f\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)}{\partial y^2}\right) = h^2(0) + 2hk(1) + k^2(0) = 2hk \end{aligned}$$

B. Apa yang Kita Pelajari?

Teorema Taylor derajat dua

Misalkan $f(x, y)$ mempunyai turunan ketiga yang kontinu, maka

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \\ &\frac{1}{2!} \left[(x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] \text{ dengan} \end{aligned}$$

$$R_3 = \frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1 + \theta h, -1 + \theta k)}{3!}$$

C. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan formula Taylor orde 3 untuk fungsi $f(x, y) = \cos x \cos y$ di sekitar titik $(0,0)$. **(skor 50)**
2. Tentukan formula Taylor fungsi $f(x, y) = x^4 + y^4$ di sekitar titik $(1,1)$ dengan $n = 3$. **(skor 50)**

Pembahasan:

1. Deret Taylor orde 3 dari

$$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

di sekitar titik $(0,0)$.

Langkah 1: Rumus Umum Deret Taylor Dua Variabel

Untuk fungsi $f(x,y)$, deret Taylor di sekitar $(0,0)$ hingga orde 3 adalah:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0,0)x^2 + \\ & 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + \\ & 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3]. \end{aligned}$$

(skor 10)

Langkah 2: Hitung Turunan Parsial

Fungsi:

$$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

Orde 0:

$$f(0,0) = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1$$

Orde 1:

$$f_x = -\sin x \cos y \Rightarrow f_x(0,0) = 0$$

$$f_y = -\cos x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$$

Orde 2:

$$f_{xx} = -\cos x \cos y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1$$

$$f_{xy} = \sin x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f_{yy} = -\cos x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$$

Orde 3:

$$f_{xxx} = \sin x \cos y \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = 0$$

$$f_{xx}y = \cos x \sin y \Rightarrow f_{xx}y(0,0) = 0$$

$$f_{xyy} = \cos x \sin y \Rightarrow f_{xyy}(0,0) = 0$$

$$f_{yyy} = \cos x \sin y \Rightarrow f_{yyy}(0,0) = 0$$

(skor 10)

Langkah 3: Susun Deret Taylor hingga Orde 3

Gunakan hasil di atas:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \frac{1}{2}(-1)y^2 + 0 \cdot xy + 0 \\ & \cdot x^3 + 0 \cdot x^2y + 0 \cdot xy^2 + 0 \cdot y^3 \end{aligned}$$

Jadi:

$$f(x, y) \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

(skor 10)

Tapi kita ingat bahwa ekspansi **orde 3** mencakup **semua** suku dengan total derajat ≤ 3 , termasuk interaksi dari suku lebih tinggi yang berasal dari ekspansi penuh (misalnya saat $f(x, y)$ ditulis sebagai deret dari hasil kali $\cos x$ dan $\cos y$).

Jadi, kita ambil deret Taylor dari:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \dots$$

Kalikan keduanya:

$$f(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + (\text{suku orde lebih tinggi})$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{4}$$

(skor 20)

Jawaban Akhir

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{4}$$

Ini adalah **ekspansi Taylor orde 3** dari

$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ di sekitar titik $(0,0)$.

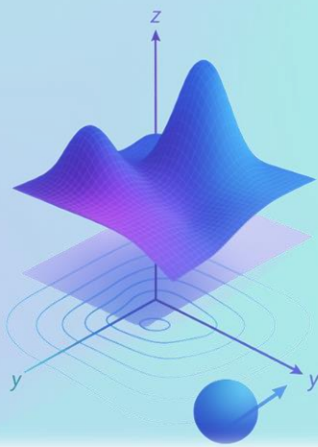
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB VII

INTEGRAL FUNGSI BERNILAI VEKTOR

Dalam matematika, khususnya kalkulus peubah banyak, fungsi tidak selalu menghasilkan bilangan *real* sebagai *output*. Ada kalanya suatu fungsi memiliki hasil berupa vektor, yang dikenal sebagai **fungsi bernilai vektor**. Fungsi jenis ini sangat penting dalam berbagai aplikasi seperti fisika (medan gaya dan kecepatan), teknik, dan ilmu komputer. Memahami karakteristik, representasi, dan contoh dari fungsi bernilai vektor merupakan langkah awal dalam menguasai konsep-konsep lanjut dalam kalkulus vektor. Setelah mempelajari materi Fungsi Bernilai Vektor, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan pengertian dan bentuk umum fungsi bernilai vektor dalam ruang dua dan tiga dimensi.
2. Mengidentifikasi komponen-komponen dari fungsi bernilai vektor dan menggambarkan representasinya secara geometris.
3. Melakukan operasi dasar terhadap fungsi bernilai vektor, termasuk penjumlahan, perkalian skalar, dan penurunan fungsi.
4. Menganalisis perilaku fungsi bernilai vektor dalam konteks pergerakan benda, medan vektor, atau lintasan kurva di ruang.
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi bernilai vektor dan aplikasinya dalam bidang sains dan teknik (Ariawan & Zetriuslita, 2023).

A. Pengertian Fungsi Bernilai Vektor

Fungsi bernilai vektor adalah fungsi yang masukan (input)-nya berupa bilangan *real* atau vektor, dan keluarannya (*output*) berupa vektor. Secara umum, fungsi bernilai vektor dari satu peubah *real* dapat ditulis sebagai:

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

dengan $f(t), g(t), h(t)$ adalah fungsi-fungsi skalar dari peubah *real* t , dan $\vec{r}(t)$ adalah vektor dalam R^3 (Marsden & Tromba, 2012). Jika hanya dua komponen, maka $\vec{r}(t) \in R^2$.

B. Contoh Fungsi Bernilai Vektor

a. Fungsi dalam R^2

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$$

Fungsi ini menggambarkan lintasan melingkar pada bidang xy dengan jari-jari 1 (Dawkins, 2025).

b. Fungsi dalam R^3

$$\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$$

Fungsi ini menggambarkan lintasan kurva di ruang tiga dimensi.

C. Operasi pada Fungsi Bernilai Vektor

Beberapa operasi penting:

a. Penjumlahan:

$$\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = \langle f_1(t) + f_2(t), g_1(t) + g_2(t), h_1(t) + h_2(t) \rangle$$

- **Perkalian Skalar:**

Jika c adalah skalar, maka

$$c \cdot \vec{r}(t) = \langle cf(t), cg(t), ch(t) \rangle$$

- **Turunan:**

Turunan dari fungsi vektor dilakukan secara komponen demi komponen:

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

D. Pengaplikasian Fungsi Bernilai Vektor

Fungsi bernilai vektor sering digunakan dalam:

- **Fisika:** Untuk menyatakan posisi, kecepatan, dan percepatan partikel.
- **Grafika komputer:** Untuk mendeskripsikan gerakan atau lintasan objek.
- **Medan vektor:** Untuk menggambarkan distribusi arah dan besar gaya di ruang.

Contoh soal:

- a) Diberikan fungsi vektor $\vec{r}(t) = \langle 2t, 3 \sin t, \ln(t + 1) \rangle$. Tentukan nilai $\vec{r}(0)$.
- b) Diberikan fungsi vektor $\vec{r}(t) = \langle t^3, e^t, \cos t \rangle$. Tentukan turunan pertama $\vec{r}'(t)$ dan evaluasi pada $t = 0$.

Pembahasan:

- a) Substitusikan $t = 0$ ke dalam masing-masing komponen:
$$\vec{r}(0) = \langle 2(0), 3 \sin(0), \ln(0 + 1) \rangle = \langle 0, 0, \ln(1) \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle.$$
- b) Turunkan masing-masing komponen terhadap t : $\vec{r}'(t) = \langle \frac{d}{dt}(t^3), \frac{d}{dt}(e^t), \frac{d}{dt}(\cos t) \rangle = \langle 3t^2, e^t, -\sin t \rangle$
Evaluasi di $t = 0$:
$$\vec{r}'(0) = \langle 3(0)^2, e^0, -\sin(0) \rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

E. Apa yang Kita Pelajari?

Fungsi bernilai vektor menghasilkan vektor sebagai outputnya.

Biasanya dituliskan dalam bentuk

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Operasi dasar seperti penjumlahan, perkalian skalar, dan turunan dilakukan per komponen.

Fungsi bernilai vektor banyak diaplikasikan dalam bidang teknik dan sains.

F. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Diberikan fungsi $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$
 - a) Hitung turunan pertama $\vec{r}'(t)$.
 - b) Tentukan nilai $\vec{r}'(\pi/2)$.(skor 25)
2. Jika $\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$, tentukan:
 - a) Panjang vektor kecepatan $|\vec{r}'(t)|$ pada $t = 1$.(skor 25)
3. Jika $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$, hitung panjang vektor kecepatan $|\vec{r}'(t)|$ saat $t = \pi$.
(skor 25)
4. Sebuah partikel bergerak mengikuti lintasan yang diberikan oleh $\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$. Tentukan posisi, kecepatan, dan percepatan partikel pada $t = 1$.
(skor 25)

Pembahasan:

1. Diberikan fungsi vektor:

$$\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$$

1. Hitung Turunan Pertama $\vec{r}'(t)$

Turunan dari fungsi vektor dilakukan komponen per komponen:

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt} \cos t, \frac{d}{dt} \sin t, \frac{d}{dt} t \right\rangle = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$$

(skor 10)

2. Evaluasi di $t = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 1 \right\rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

(skor 15)

Jawaban Akhir:

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

2. Diberikan fungsi vektor:

$$\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$$

1. Hitung Vektor Kecepatan $\vec{r}'(t)$

Turunan komponen per komponen:

$$\vec{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(t^2), \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(3) \right\rangle = \langle 2t, 2, 0 \rangle$$

(skor 10)

2. Evaluasi di $t = 1$

$$\vec{r}'(1) = \langle 2(1), 2, 0 \rangle = \langle 2, 2, 0 \rangle$$

(skor 10)

3. Hitung Panjang Vektor Kecepatan

$$|\vec{r}'(1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(skor 5)

Jawaban Akhir:

$$|\vec{r}'(1)| = 2\sqrt{2}$$

Ini adalah panjang (magnitudo) vektor kecepatan pada $t = 1$.

3. Untuk menghitung panjang vektor kecepatan $|\vec{r}'(t)|$ dari vektor posisi:

$$\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$$

Langkah-langkah:

Turunkan $\vec{r}(t)$ terhadap t untuk mendapatkan vektor kecepatan:

$$\vec{r}'(t) = \langle \cos t, -\sin t, 1 \rangle. \text{ (skor 10)}$$

Panjang vektor kecepatan (magnitudo) diberikan oleh:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2 + 1^2}. \text{ (skor 10)}$$

Sederhanakan:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}. \text{ (skor 5)}$$

Jadi, panjang vektor kecepatan saat $t = \pi$ adalah:

$$|\vec{r}'(\pi)| = \sqrt{2}$$

Jawaban akhir: $\sqrt{2}$

4. Diberikan:

$$\vec{r}(t) = \langle t^2, 2t, 3 \rangle$$

1. **Posisi** pada $t = 1$:

$$\vec{r}(1) = \langle 1^2, 2(1), 3 \rangle = \langle 1, 2, 3 \rangle. \text{ (skor 8)}$$

2. **Kecepatan** $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$:

Turunan terhadap t :

$$\vec{v}(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(t^2), \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(3) \right\rangle = \langle 2t, 2, 0 \rangle$$

Pada $t = 1$:

$$\vec{v}(1) = \langle 2(1), 2, 0 \rangle = \langle 2, 2, 0 \rangle$$

(skor 8)

3. **Percepatan** $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$:

Turunan kecepatan terhadap t :

$$\vec{a}(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(2), \frac{d}{dt}(0) \right\rangle = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

Pada $t = 1$ (tetap sama):

$$\vec{a}(1) = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

(skor 7)

Jawaban akhir:

- **Posisi:** $\vec{r}(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$
- **Kecepatan:** $\vec{v}(1) = \langle 2, 2, 0 \rangle$
- **Percepatan:** $\vec{a}(1) = \langle 2, 0, 0 \rangle$

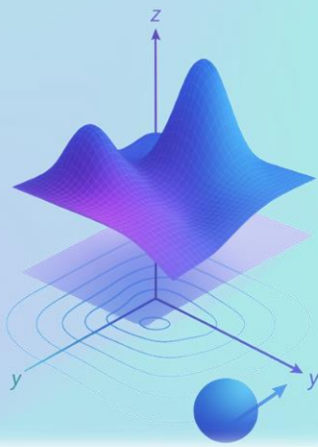
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB VIII

INTEGRAL LIPAT DUA

Pada sesi ini akan dibahas mengenai pengertian integral lipat dua, menghitung nilai integral ganda dua, fungsi yang terdefinisi pada suatu daerah. Sebelum memahami materi ini, sebaiknya Anda sudah mempelajari mengenai masalah transformasi koordinat dari sistem koordinat Cartesius ke sistem koordinat polar, ke sistem koordinat silinder dan ke sistem koordinat bola. Capaian pembelajaran khusus setelah mempelajari materi ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian integral lipat dua;
2. Terampil menghitung nilai integral lipat dua.

A. Integral Lipat Dua

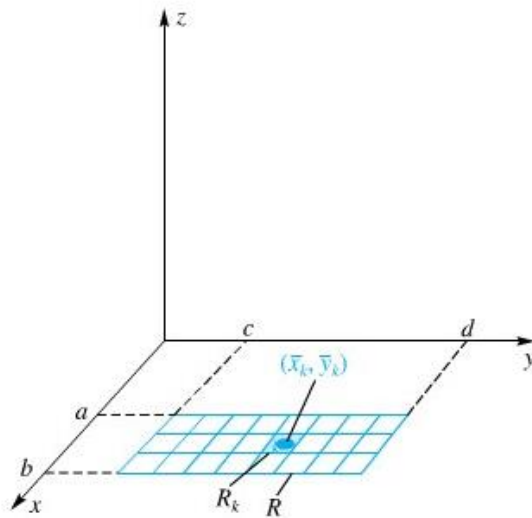
Penjelasan mengenai integral lipat dua dimulai dengan integral Riemann (Purcell & Varberg, 1987). Dalam integral Riemann, untuk fungsi satu peubah membentuk suatu partisi P dari selang $[a, b]$ menjadi beberapa selang bagian yang panjangnya Δx_k , $k = 1, 2, \dots, n$, kemudian mengambil sebuah titik dari selang bagian ke- k sehingga diperoleh

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta x_k$$

Untuk mendefinisikan integral lipat dua, akan digunakan penulisan yang sama dengan penulisan integral tentu untuk satu peubah seperti di atas.

Jika R merupakan suatu persegi panjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, yaitu:

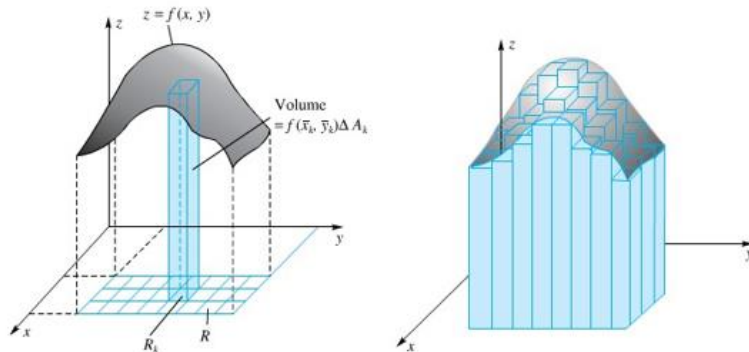
$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



Persegi panjang R kita partisi dengan garis bantu yang sejajar sumbu x dan sumbu y menjadi persegi panjang sebanyak n buah yang ditunjukkan dengan R_k di mana $k = 1, 2, \dots, n$. Panjang sisi-sisi R_k adalah Δx_k dan Δy_k . Luas $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

Ambil sebuah titik $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ pada R_k . Bentuk penjumlahan Riemann jika $f(x, y) \geq 0$ yang berpadanan dengan jumlah volume dari n kotak

adalah $\sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$. Buat semua R_k menjadi lebih kecil dengan cara membuat partisi yang semakin halus sehingga akan kita peroleh konsep integral lipat dua.



$|P|$ merupakan panjang diagonal terpanjang dari setiap persegi panjang bagian dalam partisi.

Definisi.

Andaikan f suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R . Jika $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k$ ada, kita katakan f dapat diintegrasikan pada R .

$\iint_R f(x, y) dA$, yang disebut integral lipat-dua f pada R , dinyatakan dengan

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k$$

Jika $f(x, y) \geq 0$, maka $\iint_R f(x, y) dA$ menyatakan volume benda pejal di bawah permukaan $z = f(x, y)$ dan di atas persegi panjang R .

Sifat-sifat integral lipat dua

Sifat-sifat yang dimiliki integral lipat dua hampir semua sama dengan sifat integral tunggal, yaitu:

1. Bersifat linear, yakni:

$$\begin{aligned} \iint_R k f(x, y) dA &= k \iint_R f(x, y) dA \\ \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA &= \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA \end{aligned}$$

2. Bersifat aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi pada suatu ruas garis.

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} g(x, y) dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku. Jika $f(x, y) \leq g(x, y)$ untuk semua (x, y) di R , maka

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

Perhitungan Integral Lipat Dua

Jika $f(x, y) = 1$ pada R , maka integral lipat dua merupakan luas R sehingga

$$\iint_R k dA = k \iint_R 1 dA = kA(R)$$

Contoh.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1 \\ 2, & \text{jika } 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 3, & \text{jika } 0 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Tentukan $\iint_R f(x, y) dA$, di mana $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$

Pembahasan.

Anggap

$$R_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$R_3 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3\}$$

dengan menggunakan sifat penjumlahan dari integral lipat-dua, kita peroleh

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA + \iint_{R_3} f(x, y) dA$$

$$= 1A(R_1) + 2A(R_2) + 3A(R_3)$$

$$= 1,3 + 2,3 + 3,3 = 18$$

B. Apa yang Kita Pelajari?

Interpretasi integral lipat dua $f(x, y)$ pada persegi panjang R adalah volume di bawah fungsi $f(x, y)$ (dan di atas bidang xy) atau

$$\text{Volume} = \iint_R f(x, y) dA$$

Theorema Fubini (Integral iterasi):

Jika (x, y) kontinu di R $[a, b] \times [c, d]$ maka,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

C. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Hitung $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y dy dx$. **(skor 20)**
2. Hitung $\int_0^3 \int_{y-3}^0 (4 - 2xy) dx dy$. **(skor 20)**
3. Hitung $\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy$. **(skor 20)**
4. Hitung $\iint_D (x + y) dA$; D daerah yang dibatasi oleh $y = x^2, y = -x$ dan $x = 2$. **(skor 20)**
5. Hitung volume benda yang dibatasi oleh $3x + 2y + z = 12, 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 6; 0 \leq x \leq 4; 0 \leq z \leq 2$. **(skor 20)**

Pembahasan:

1.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dy dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_1^2 dx \\&= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2} (x)^2 (2)^2 \right) - \left(\frac{1}{2} (x)^2 (1)^2 \right) \right] dx \\&= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right] dx \\&= \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 \, dx \\&= \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^1 \\&= \frac{1}{2} (1)^3 - 0 = \frac{1}{2}. \text{ (skor 20)}\end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_{y-3}^0 (4 - 2xy) \, dx dy &= \int_0^3 [4x - x^2 y] \Big|_{y-3}^0 dy \\&= \int_0^3 [0 - (4(y-3) - (y-3)^2 y)] dy \\&= \int_0^3 [-4y + 12 + y^3 - 6y^2 + 9y] dy \\&= \int_0^3 [12 + y^3 - 6y^2 + 5y] dy \\&= 12y + \frac{1}{4} y^4 - 2y^3 + \frac{5}{2} y^2 \Big|_0^3 \\&= 12(3) + \frac{1}{4} (3)^4 - 2(3)^3 + \frac{5}{2} (3)^2 \\&= 36 + \frac{81}{4} - 54 + \frac{45}{2} \\&= -18 + \frac{81 + 90}{4} \\&= \frac{171 - 72}{4} \\&= \frac{99}{4}. \text{ (skor 20)}\end{aligned}$$
3.
$$\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) \, dx dy = \int_2^4 \left[\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right]_1^2 dy = \frac{70}{3}.$$

(skor 20)
4. D adalah daerah yang dibatasi oleh:
 - $y = x^2$
 - $y = -x$
 - $x = 2$

Langkah 1: Gambar & Pahami Daerah D

Kurva-kurva:

1. $y = x^2$ — parabola terbuka ke atas
2. $y = -x$ — garis lurus miring ke bawah
3. $x = 2$ — garis vertikal

Cari titik potong $y = x^2$ dan $y = -x$:

$$x^2 = -x \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1$$

Jadi:

- Titik potong antara parabola dan garis: $x = -1$ dan $x = 0$
- Batas x dari daerah: dari $x = -1$ sampai $x = 2$
Untuk masing-masing x , kurva bawah: $y = x^2$, atas: $y = -x$
(karena $x^2 \leq -x$ di daerah tersebut).

Langkah 2: Nyatakan sebagai integral iterasi

$$\iint_D (x + y) dA = \int_{x=-1}^2 \int_{y=x^2}^{-x} (x + y) dy dx$$

Langkah 3: Hitung integral dalam (terhadap y)

$$\int_{y=x^2}^{-x} (x + y) dy = \int_{x^2}^{-x} x dy + \int_{x^2}^{-x} y dy$$

Hitung masing-masing:

$$\int_{x^2}^{-x} x dy = x(-x - x^2) = x(-x - x^2) = -x^2 - x^3$$

$$\int_{x^2}^{-x} y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{-x} = \frac{(-x)^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}$$

Jumlah:

$$\int_{x^2}^{-x} (x + y) dy = -x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} = -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}$$

Langkah 4: Integrasi luar (terhadap x)

$$\int_{x=-1}^2 \left(-\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^2 x^2 dx - \int_{-1}^2 x^3 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^2 x^4 dx$$

Hitung masing-masing:

$$1. \int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{9}{3} = 3$$

$$2. \int_{-1}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$3. \int_{-1}^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^2 = \frac{32}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{33}{5}$$

Langkah 5: Gabungkan semuanya

$$= -\frac{1}{2}(3) - \frac{15}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{5} = -\frac{3}{2} - \frac{15}{4} - \frac{33}{10}$$

$$= -\frac{30}{20} - \frac{75}{20} - \frac{66}{20} = -\frac{171}{20}$$

(skor 20)

Jawaban Akhir: $-\frac{171}{20}$

5. Untuk menghitung volume benda yang dibatasi oleh:

Bidang: $3x + 2y + z = 12 \rightarrow$ atau $z = 12 - 3x - 2y$

Batas bawah dan atas pada z : $0 \leq z \leq 20$

Daerah proyeksi pada bidang xy :

$$0 \leq x \leq 40$$

$$0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 6$$

Langkah 1: Identifikasi batas integrasi

Batas integrasi pada:

$$x \in [0, 4]$$

Untuk setiap $x, y \in [0, -\frac{3}{2}x + 6]$

Untuk setiap $(x, y), z \in [0, \min(2, 12 - 3x - 2y)]$

Tapi soal membatasi z dari bawah ke atas:

Bawah: $z = 0$

Atas: bidang $z = 12 - 3x - 2y$, dibatasi pula oleh $z = 2$
 Jadi, untuk setiap (x, y) , nilai maksimum z adalah:

$$z_{max} = \min(12 - 3x - 2y, 2)$$

Langkah 2: Tentukan Daerah Proyeksi R di Bidang xy

Dari:

$$x \in [0, 4]$$

$$y \in [0, -\frac{3}{2}x + 6]$$

Itu adalah daerah segitiga dalam koordinat xy . Mari kita pakai batas ini dalam integrasi.

Langkah 3: Tentukan Volume dengan Integral

Kita akan menghitung volume:

$$V = \iint_R \int_{z=0}^{\min(2, 12-3x-2y)} dz \, dy \, dx$$

Kita perlu membagi daerah menjadi dua:

Karena fungsi batas atas $z = 12 - 3x - 2y$ bisa lebih besar atau lebih kecil dari 2, kita harus cari:

$$12 - 3x - 2y = 2 \Rightarrow 3x + 2y = 10 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 5$$

Daerah dibagi menjadi:

Bagian 1: di bawah $y = -\frac{3}{2}x + 5y \Rightarrow z_{max} = 2$

Bagian 2: antara $y = -\frac{3}{2}x + 5$ dan $y = -\frac{3}{2}x + 6 \Rightarrow z_{max} = 12 - 3x - 2y$

Langkah 4: Tulis Integral sebagai Jumlah 2 Bagian

- Bagian 1 ($z = 0$ sampai 2)

Daerah:

$$x \in [0, 4]$$

$$y \in [0, -\frac{3}{2}x + 5]$$

Volume:

$$V_1 = \int_0^4 \int_0^{-\frac{3}{2}x+5} \int_0^2 dz \, dy \, dx = \int_0^4 \int_0^{-\frac{3}{2}x+5} 2 \, dy \, dx$$

Hitung integral dalam:

$$\begin{aligned} \int_0^4 2\left(-\frac{3}{2}x + 5\right) dx &= 2 \int_0^4 \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) dx = 2 \left[-\frac{3}{2}x^2 + 5x\right]_0^4 = \\ 2\left(-\frac{3}{2}(16) + 20\right) &= 2(-12 + 20) = 2(8) = 16 \end{aligned}$$

- Bagian 2 ($z = 0$ sampai $12 - 3x - 2y$)

Daerah:

$$\begin{aligned} x &\in [0, 4] \\ y &\in \left[-\frac{3}{2}x + 5, -\frac{3}{2}x + 6\right] \end{aligned}$$

Volume:

$$V_2 = \int_0^4 \int_{-\frac{3}{2}x+5}^{-\frac{3}{2}x+6} \int_0^{12-3x-2y} dz \, dy \, dx$$

Hitung integral dalam:

$$\int_0^{12-3x-2y} dz = 12 - 3x - 2y$$

Sehingga:

$$V_2 = \int_0^4 \int_{-\frac{3}{2}x+5}^{-\frac{3}{2}x+6} (12 - 3x - 2y) dy \, dx$$

Hitung integral dalam:

$$\int_{-\frac{3}{2}x+5}^{-\frac{3}{2}x+6} (12 - 3x - 2y) dy = (12 - 3x)y - y^2 \Big|_{y_1}^{y_2}$$

Dengan:

$$y_2 = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$y_1 = -\frac{3}{2}x + 5$$

Selisih $y_2 - y_1 = 1$, interval kecil, jadi ekspresi cukup sederhana:

hitung total:

- $a = -\frac{3}{2}x + 5$
- $b = -\frac{3}{2}x + 6$

$$\int_a^b (12 - 3x - 2y)dy = (12 - 3x)(b - a) - (b^2 - a^2)$$

Karena:

$$b - a = 1$$

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 1 \cdot (a + b) = a + b$$

Jadi:

$$\begin{aligned}\int_a^b (12 - 3x - 2y)dy &= (12 - 3x)(1) - (a + b) \\ &= 12 - 3x - (-3x + 11) \\ &= 12 - 3x + 3x - 11 = 1\end{aligned}$$

Jadi:

$$V_2 = \int_0^4 1 \, dx = [x]_0^4 = 4$$

Langkah 5: Jumlahkan Volume

$$V = V_1 + V_2 = 16 + 4 = 20$$

(skor 20)

Jawaban Akhir: 20 satuan volume

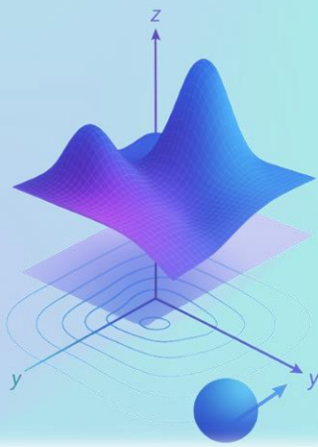
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB IX

INTEGRAL LIPAT TIGA

Bab ini menyajikan integral ganda, khususnya integral ganda tiga. Untuk mempelajari materi ini diharapkan Anda telah menguasai materi integral satu dan integral ganda dua.

Setelah mempelajari bab ini, para pembaca diharapkan mampu menjelaskan pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang berkaitan dengan integral ganda tiga. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bahan ajar ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian integral lipat tiga;
2. Terampil menghitung nilai integral lipat tiga.

A. Integral Lipat Tiga

Bentuk Umum Integral Ganda Tiga

$$\iiint_R f(x, y, z) dv$$

Merupakan suatu fungsi tiga variabel dalam daerah tertutup yang terdiri dari titik-titik (x, y, z) dan volumenya V (Soedijono, 2008; Warsito, 2020). Dalam hal ini, $f(x, y, z)$ bernilai tunggal dan kontinu.

Integral Ganda Tiga dalam Koordinat Kartesius dinyatakan dengan

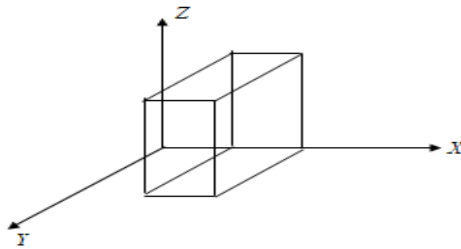
$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dv &= \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{y_1=y(z)}^{y_2=y(z)} \int_{x_1=x(y,z)}^{x_2=x(y,z)} f(x, y, z) dx dy dz \\&= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{z_1=z(y)}^{z_2=z(y)} \int_{x_1=x(z,y)}^{x_2=x(z,y)} f(x, y, z) dx dz dy \\&= \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{x_1=x(z)}^{x_2=x(z)} \int_{y_1=y(x,z)}^{y_2=y(x,z)} f(x, y, z) dy dx dz \\&= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{z_1=z(x)}^{z_2=z(x)} \int_{y_1=y(z,x)}^{y_2=y(z,x)} f(x, y, z) dy dx dz \\&= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \int_{z_1=z(y,x)}^{z_2=z(y,x)} f(x, y, z) dz dy dx \\&= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy\end{aligned}$$

Contoh soal.

Tentukan $\iiint_R (x + y) dV$ dengan R adalah kotak $R = \{(x, y, z); 1 \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$

Penyelesaian:

R pada soal tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



$$\text{Sehingga } \iiint_R (x + y) dV = \int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 (x + y) dy dx dz$$

$$= \int_0^2 \int_1^2 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 dx dz$$

$$= \int_0^2 \int_1^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx dz$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) \Big|_1^2 dz$$

$$= \int_0^2 (3 - 1) dz$$

$$= (2z) \Big|_0^2$$

$$= 4$$

B. Apa yang Kita Pelajari?

Bentuk umum notasi integral lipat tiga adalah

$$= \iiint_R (x, y, z) dV$$

merupakan volume daerah tiga dimensi R .

Interpretasi integral lipat tiga $f(x, y, z)$ pada kotak

$R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ adalah

$$\iiint_R (x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

C. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan $\iiint_R dV$ dengan R adalah benda kurva yang dibatasi oleh persamaan $x + y + z = 1$ pada oktan I. (**skor 25**)
2. Integral $\iiint_W (x + 2y + 3z)^2 dx dy dz$ dengan W adalah kotak $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$ adalah (**skor 25**)
3. Nilai dari $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyz dz dy dx$ adalah (**skor 25**)
4. Diketahui B adalah kotak $B = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$, nilai dari $\iiint_B x^2 yz dV$ adalah (**skor 25**)

Pembahasan:

1. Untuk menyelesaikan integral tiga lipat berikut:

$$\iiint_R dV$$

dengan R adalah bagian dari ruang di oktan I yang dibatasi oleh bidang $x + y + z = 1$, kita akan:

1. Memahami Batas Daerah

Oktan I artinya semua variabel $x, y, z \geq 0$.

Batas atasnya adalah bidang $x + y + z = 1$.

Maka R adalah **tetrahedron** di dalam kubus satuan yang dibatasi oleh bidang tersebut. **(skor 15)**

2. Menentukan batas integral

Kita gunakan urutan integrasi $dz \, dy \, dx$:

x dari 0 sampai 1

untuk setiap x , y dari 0 sampai $1-x$

untuk setiap x, y , z dari 0 sampai $1 - x - y$

Jadi integralnya menjadi:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{6}. \text{ (skor 10)}$$

Jadi, volume benda yang dibatasi oleh $x + y + z = 1$ di oktan pertama adalah $\frac{1}{6}$ satuan volume.

2. Kita diberikan sebuah integral tiga lipat:

$$\iiint_W (x + 2y + 3z)^2 \, dx \, dy \, dz$$

dengan domain W berupa kotak:

$$W = [0,1] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

Langkah-Langkah:

Fungsi yang diintegrasikan adalah $(x + 2y + 3z)^2$, yang merupakan polinomial kuadrat dalam tiga variabel. **(skor 15)**

Karena domain W berbentuk kotak (batas tetap dan tidak tergantung variabel lain), kita bisa lakukan integrasi secara langsung dengan urutan apa pun. Misalnya, urutan $dx \, dy \, dz$.

Hasil dari integral tiga lipat tersebut adalah:

$$W = [0,1] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{12}. \text{ (skor 10)}$$

Jadi, nilai integralnya adalah $\frac{1}{12}$ satuan volume.

3. Kita diberikan integral tiga lipat bertingkat:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyz \, dz \, dy \, dx$$

Langkah-Langkah:

1. Urutan integrasi: dari dalam ke luar adalah dz , lalu dy , lalu dx .
2. Fungsi yang diintegrasikan adalah xyz , jadi kita integrasikan z terlebih dahulu dari 0 ke y , kemudian y dari x ke $\sqrt{x}$, dan terakhir x dari 0 ke 1.

Hasil dari integral tiga lipat tersebut adalah:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_0^y xyz \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{96}. \text{ (skor 25)}$$

4. Kita diberikan integral tiga lipat:

$$\iiint_B x^2 yz \, dV$$

dengan domain B adalah kotak:

$$B = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

Langkah-Langkah:

- Karena batasnya adalah tetap, kita bisa langsung lakukan integrasi bertingkat.

- Urutan: $dx dy dz$, atau lainnya, hasilnya akan tetap sama.
- Fungsi: x^2yz

Nilai dari integral berikut:

$$\iiint_B x^2yz \, dV \text{ (skor 15)}$$

dengan

$$B = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

adalah $\frac{7}{3}$ (skor 10)

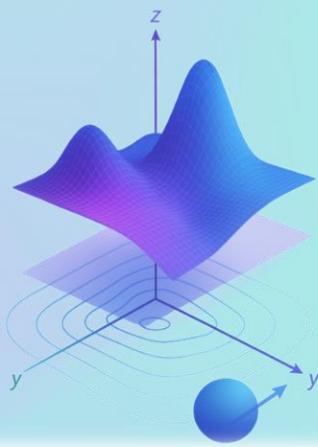
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB X

INTEGRAL GARIS DENGAN PARAMETER

Pada sesi ini akan dibahas mengenai integral garis. Anda diharapkan untuk menyimak, memahami dengan baik mengenai integral garis ini karena akan menjadi dasar materi Teorema Green yang akan dibahas pada sesi selanjutnya.

Untuk memahami materi ini dengan baik, sebaiknya Anda menguasai materi integral fungsi satu variabel, dan konsep dua variabel. Setelah mempelajari bab ini, para pembaca diharapkan mampu menghitung integral garis. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bahan ajar ini adalah:

1. Mampu menjelaskan integral garis;
2. Mampu menghitung nilai integral garis
3. Mampu menjelaskan integral garis pada lintasan tertutup adalah 0.

A. Integral Garis dengan Parameter

Pada bab ini dikenalkan integral jenis baru. Anda harus mengingat beberapa bentuk persamaan parameter atau menentukan persamaan parameter berdasarkan kurva yang diberikan. Berikut adalah tabel persamaan parametrik berdasarkan bentuk kurva yang diberikan (Dawkins, 2025).

Curve	Persamaan Parametrik	
Ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Berlawanan arah jarum jam $x = a \cos t$ $y = b \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$	Searah jarum jam $x = a \cos t$ $y = -b \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$
Lingkaran: $x^2 + y^2 = r^2$	Berlawanan arah jarum jam $x = r \cos t$ $y = r \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$	Searah jarum jam $x = r \cos t$ $y = -r \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$
$y = f(x)$	$x = t$ $y = f(t)$	
$x = g(y)$	$x = g(t)$ $y = t$	
Segmen garis dari (x_0, y_0, z_0) ke (x_1, y_1, z_1)	$\vec{r}(t) = (1 - t)\langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle x_1, y_1, z_1 \rangle, 0 \leq t \leq 1$ atau $x = (1 - t)x_0 + tx_1$ $y = (1 - t)y_0 + ty_1, 0 \leq t \leq 1$ $z = (1 - t)z_0 + tz_1$	

Persamaan yang terdapat pada akhir tabel merupakan persamaan vektor dan juga bentuk parametrik. Untuk fungsi dua peubah, maka kita hanya membuang komponen z.

Untuk elips dan lingkaran, diberikan dua proses parameter, satu menelusuri kurva searah jarum jam dan yang lainnya berlawanan arah jarum jam. Keduanya mulai pada sumbu x positif di $t = 0$.

Dalam kalkulus 1, kita mengintegrasikan $f(x)$, sebuah fungsi dari satu peubah pada suatu interval (Istikomah, 2022; Leithold, 1972). Pada integral garis, kita mengintegrasikan $f(x, y)$ yang merupakan fungsi dua peubah, dan nilai x dan y yang digunakan adalah titik-titik (x, y) yang terletak pada kurva C .

Kita awali dengan kurva C tempat titik-titik berasal. Asumsikan bahwa kurva tersebut mulus, dengan persamaan parametrik,

$$x = h(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

Jika dituliskan dalam bentuk fungsi vektor, maka kurva tersebut memiliki persamaan,

$$\vec{r}(t) = h(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \quad a \leq t \leq b$$

Kurva tersebut dikatakan mulus jika $\vec{r}(t)$ kontinu dan $\vec{r}'(t) \neq 0$ untuk semua t .

Integral garis dari $f(x, y)$ dituliskan sebagai

$$\int_C f(x, y) \, ds$$

ds menyatakan bahwa pergerakan terjadi sepanjang kurva C , bukan sepanjang sumbu x atau pun sumbu y .

Panjang busur suatu kurva diberikan melalui persamaan parametrik,

$$L = \int_a^b ds, \text{ di mana } ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Simbol ds sama-sama digunakan untuk integral panjang busur dan notasi integral garis. Untuk integral garis, kita akan mengubahnya menjadi persamaan parametrik berikut,

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Jika kita menggunakan parameter ke dalam bentuk vektor, persamaan parametrik tersebut menjadi,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \|\vec{r}'(t)\|$$

di mana $\|\vec{r}'(t)\|$ adalah besaran atau *norm* dari $\vec{r}'(t)$. Dengan menggunakan notasi ini, integral garis menjadi,

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Contoh:

Jika $\vec{A} = (3y - x)\vec{i} + (2 - 6xz)\vec{j} + (4z^2)\vec{k}$. Hitung $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ dari $(0,0,0)$ sampai $(1,1,1)$ menyusuri lintasan C yaitu garis lurus yang menghubungkan $(0,0,0)$ dan $(1,1,1)$.

Penyelesaian:

Cara 1.

Garis lurus yang menghubungkan titik $(0,0,0)$ dan $(1,1,1)$ merupakan suatu persamaan dalam bentuk parameter berikut: $x = t, y = t, z = t$. Parameter ini disusun untuk memberikan variabel yang sama (yaitu t) pada fungsi x, y dan z .

Mengapa harus diberikan variabel yang sama yaitu t ? Karena garis lurus yang menghubungkan titik $(0,0,0)$ dan $(1,1,1)$ mempunyai perubahan yang sama yaitu x berubah dari 0 menjadi 1, y berubah dari 0 menjadi 1 dan z berubah dari 0 menjadi 1.

Apabila garis lurus yang menghubungkan 2 titik tidak mempunyai perubahan yang sama maka Anda dapat gunakan variabel x, y dan z pada

integral garis Anda. Jadi integral garis dari vektor posisi $\vec{A} = (3y - x)\vec{i} + (2 - 6xz)\vec{j} + (4z^2)\vec{k}$ adalah:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \\ &= \int_0^1 (3y - x) dx + \int_0^1 (2 - 6xz) dy + \int_0^1 (4z^2) dz \\ &= \int_0^1 (3t - t) dt + \int_0^1 (2 - 6t^2) dt + \int_0^1 (4t^2) dt \\ &= \int_0^1 (2t + 2 - 2t^2) dt \\ &= t^2 + 2t - \frac{2}{3}t^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Cara 2.

Dari soal di atas dapat pula diselesaikan dengan persamaan (2) yaitu

$$C: r(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}; 0 \leq t \leq 1$$

dengan demikian $x(t) = t, y(t) = t, z(t) = t$

$$\begin{aligned}A(r(t)) &= A(x(t), y(t), z(t)) \\ &= (3y(t) - x(t))\vec{i} + (2 - 6x(t)z(t))\vec{j} + (4[z(t)]^2)\vec{k} \\ &= (3t - t)\vec{i} + (2 - 6t^2)\vec{j} + (4t^2)\vec{k}\end{aligned}$$

dan

$$r'(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_a^b A(r(t)), r'(t) dt &= \\ &= \int_0^1 [(3t - t)\vec{i} + (2 - 6t^2)\vec{j} + (4t^2)\vec{k}] [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] dt \\ &= \int_0^1 [(3t - t) + (2 - 6t^2) + (4t^2)] dt \\ &= \int_0^1 (2t + 2 - 2t^2) dt\end{aligned}$$

$$= t^2 + 2t - \frac{2}{3}t^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{7}{3}$$

B. Apa yang Kita Pelajari?

Integral garis dari $f(x, y)$ dituliskan sebagai

$$\int_C f(x, y) ds$$

atau

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

atau

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

C. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Tentukan penyelesaian

$$\int_C x^2z dx - yx^2dy + 3xzdz$$

di mana C adalah garis lurus dari $(0,0,0)$ sampai $(1,1,0)$ kemudian ke $(1,1,1)$. **(skor 50)**

2. Tentukan penyelesaian

$$\int_C x^2y dx + xy^2 dy + 2yz dz$$

di mana C adalah garis lurus dari $(0,0,0)$ sampai $(0,1,1)$ kemudian ke $(1,1,1)$. **(skor 50)**

Pembahasan:

1. Kita diminta menghitung integral garis bentuk:

$$\int_C x^2 z \, dx - yx^2 \, dy + 3xz \, dz$$

dengan C adalah kurva lintasan yang terdiri dari dua segmen garis lurus:

1. Segmen 1: dari $A = (0,0,0)$ ke $B = (1,1,0)$
2. Segmen 2: dari $B = (1,1,0)$ ke $C = (1,1,1)$

(skor 10)

Integral ini adalah integral garis terhadap vektor medan:

$$\vec{F}(x, y, z) = \langle x^2 z, -x^2 y, 3xz \rangle, \text{ dan } d\vec{r} = \langle dx, dy, dz \rangle$$

Maka:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C x^2 z \, dx - x^2 y \, dy + 3xz \, dz$$

Kita akan menghitung dua bagian integral secara terpisah dan kemudian jumlahkan.

Segmen 1: dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 1, 0)$

Parametrik:

$$\vec{r}_1(t) = \langle t, t, 0 \rangle, t \in [0,1]$$

Turunannya:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

Evaluasi $\vec{F}$ pada $\vec{r}_1(t)$:

$$\vec{F} = \langle t^2, 0, -t^2 \cdot t, 3, 0 \rangle = \langle 0, -t^3, 0 \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \cdot 1 + (-t^3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -t^3$$

Integral segmen 1:

$$\int_0^1 (-t^3) dt = - \left[\frac{t^4}{4} \right] \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

(skor 15)

Segmen 2: dari $(1, 1, 0)$ ke $(1, 1, 1)$

Parametrik:

$$\vec{r}_2(t) = \langle 1, 1, t \rangle, t \in [0, 1]$$

Turunannya:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Evaluasi $\vec{F}$ pada $\vec{r}_2(t)$:

$$\vec{F} = \langle 1^2 \cdot t, -1^2 \cdot 1, 3 \cdot 1 \cdot t \rangle = \langle t, -1, 3t \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = t, 0 + (-1), 0 + 3t, 1 = 3t$$

Integral segmen 2:

$$\int_0^1 3t \, dt = \left[\frac{3t^2}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

(skor 15)

Total Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\text{Segmen 1}) + (\text{Segmen 2}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \text{ (skor 10)}$$

Jawaban akhir: $\frac{5}{4}$

2. Kita ingin menghitung integral garis berikut:

$$\int_C x^2 y \, dx + xy^2 \, dy + 2yz \, dz$$

dengan C adalah lintasan dua segmen garis lurus:

1. Dari $A = (0,0,0)$ ke $B = (0,1,1)$

2. Dari $B = (0,1,1)$ ke $C = (1,1,1)$

(skor 10)

Integral ini adalah bentuk:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ dengan } \vec{F}(x, y, z) = \langle x^2y, xy^2, 2yz \rangle$$

Segmen 1: dari $(0, 0, 0)$ ke $(0, 1, 1)$

Parametrik:

$$\vec{r}_1(t) = \langle 0, t, t \rangle, t \in [0, 1]$$

Turunan:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \langle 0, 1, 1 \rangle$$

Evaluasi $\vec{F}$:

$$x = 0, y = t, z = t \Rightarrow \vec{F} = \langle 0, 0, 2t^2 \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} = 0 + 0 + 2t^2 \cdot 1 = 2t^2$$

Integral segmen 1:

$$\int_0^1 2t^2 dt = \left[\frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \text{ (skor 15)}$$

Segmen 2: dari $(0, 1, 1)$ ke $(1, 1, 1)$

Parametrik:

$$\vec{r}_2(t) = \langle t, 1, 1 \rangle, t \in [0, 1]$$

Turunan:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

Evaluasi $\vec{F}$:

$$x = t, y = 1, z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \langle t^2 \cdot 1, t \cdot 1^2, 2 \cdot 1 \cdot 1 \rangle = \langle t^2, t, 2 \rangle$$

Dot product:

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} = t^2 \cdot 1 + t \cdot 0 + 2 \cdot 0 = t^2$$

Integral segmen 2:

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ (skor 15)}$$

Total Integral:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}; = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1. \text{ (skor 10)}$$

Jawaban akhir: 1

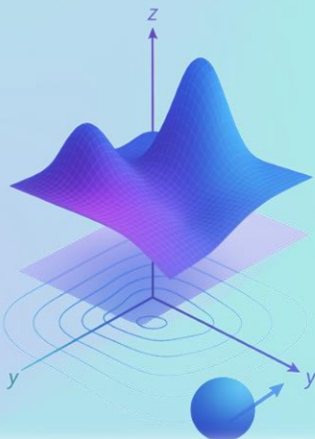
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB XI

TEOREMA GREEN

Materi Teorema Green merupakan pengembangan dari materi integral garis. Untuk memudahkan memahami materi Teorema Green, Anda disarankan telah menguasai pengertian tentang integral garis. Setelah mempelajari materi ini diharapkan Anda mampu menyelesaikan berbagai permasalahan mengenai Teorema Green.

Capaian pembelajaran khusus setelah Anda mempelajari bab ini adalah:

1. Mampu menjelaskan pengertian Teorema Green serta dapat menggunakannya;
2. Terampil menghitung menggunakan Teorema Green.

A. Teorema Green

Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C , M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari x dan y yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam R , maka

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

Jika $\mathbf{A}$ menyatakan medan gaya yang bekerja pada sebuah partikel di mana $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, maka $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ adalah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan partikel tersebut mengelilingi suatu lintasan tertutup C yaitu

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \oint_C Mdx + Ndy \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema Green, maka usaha yang dilakukan adalah

$$= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

(Dawkins, 2025; Marsden & Tromba, 2012)

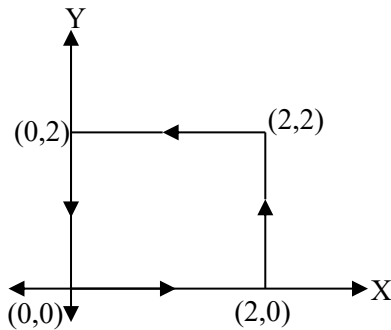
Jadi, selain perhitungan dengan menggunakan integral garis, menentukan besar usaha yang dilakukan juga dapat dihitung dengan menggunakan teorema Green.

Contoh

Hitunglah $\oint_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$ di mana C adalah suatu bujur sangkar dengan titik sudut $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$.

Pembahasan:

Gambar daerah yang dimaksud adalah sebagai berikut.



$$M = x^2 - xy^3 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - xy^3)}{\partial y} = -3xy^2 \rightarrow -\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2$$

$$N = y^2 - 2xy \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(y^2 - 2xy)}{\partial x} = -2y$$

Berdasarkan teorema Green,

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Maka

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left(\frac{\partial(y^2 - 2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - xy^3)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^2 (-2y + 3xy^2) dy dx \\ &= \int_0^2 (-y^2 + xy^3) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^2 (-4 + 8x) dx \\ &= -4x + 4x^2 \Big|_0^2 \end{aligned}$$

$$= -8 + 16 = 8$$

$$\text{Jadi, } \oint_C [(x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy] = 8$$

B. Apa yang Kita Pelajari?

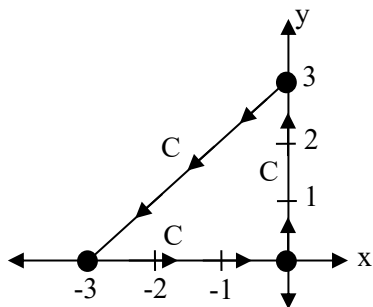
Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C , M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari x dan y yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam R , maka

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

C. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Andaikan C adalah batas dari segitiga dengan titik-titik sudut $(0,0)$, $(1,2)$, dan $(0,2)$. maka hitunglah $\int_C 4x^2y dx + 2y dy$. (**skor 25**)
2. Dengan menggunakan Teorema Green, untuk $P = y$ dan $Q = x$, maka $\oint_{(1,2)}^{(5,6)} (y dx + x dy) = \dots$ (**skor 25**)
3. Diketahui $\oint_C (xy^2 + x^2) dx + (4x - 1) dy$, di mana C seperti pada gambar berikut. (**skor 50**)



Hitung integral garisnya:

- Secara langsung
- Menggunakan Teorema Green.

Pembahasan:

- Kita ingin menghitung integral garis:

$$\int_C 4x^2y \, dx + 2y \, dy$$

dengan C adalah **batas tertutup** dari segitiga dengan titik sudut:

$$A = (0,0)$$

$$B = (1,2)$$

$$C = (0,2)$$

dan lintasannya berarah **positif** (berlawanan arah jarum jam).

Gunakan Teorema Green

Karena C adalah kurva tertutup bidang, kita bisa menggunakan

Teorema Green:

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA . \text{ (skor 5)}$$

dengan:

- $P(x, y) = 4x^2y$

- $Q(x, y) = 2y$

(skor 5)

Hitung turunannya:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^2$$

Jadi,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 4x^2 = -4x^2. \text{ (skor 5)}$$

Hitung integral area:

Sekarang kita integralkan $-4x^2$ di dalam daerah segitiga R dengan titik: $(0,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$

Tentukan batas daerah R :

Daerah R adalah segitiga dengan titik:

- $(0,0)$
- $(1,2)$
- $(0,2)$

Segitiga ini dapat dijelaskan dengan $x \in [0,1]$

Untuk setiap x , $y \in [2x, 2]$

Karena garis dari $(0,0)$ ke $(1,2)$ adalah $y = 2x$

$$\begin{aligned} \iint_R (-4x^2) dA &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (-4x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (-4x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 (-4x^2 y) \Big|_{2x}^2 dx \\ &= \int_0^1 (-8x^2 + 8x^3) dx \\ &= -\frac{8}{3}x^3 + 2x^4 \Big|_0^1 \\ &= -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}. \text{ (skor 10)} \end{aligned}$$

Jawaban akhir: $-\frac{2}{3}$

2. Langkah 1: Terapkan Teorema Green

Bentuk integral:

$$\oint_C (y \, dx + x \, dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

dengan:

$$P(x, y) = y$$

$$Q(x, y) = x$$

(skor 5)

Turunan parsial:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Maka:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

(skor 10)

Langkah 2: Evaluasi Integral Ganda

Karena integrannya = 0, maka:

$$\iint_R 0 \, dA = 0. \text{ (skor 10)}$$

Catatan:

Ini berlaku **untuk lintasan tertutup**, bentuk apa pun.

Jadi walaupun kamu belum menyebut bentuk tertutupnya (segitiga, segmen, atau lainnya), **hasilnya tetap 0** karena medan vektor $\vec{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$ punya **divergensi nol di bidang**.

Jawaban akhir: 0

3. Kurva yang terbentuk adalah persegi panjang dengan batas:

Kiri: $x = 0$

Kanan: $x = 2$

Bawah: $y = 0$

Atas: $y = 1$

Sehingga:

C: persegi panjang dengan $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$

Diberikan Integral Garis:

$$\oint_C (xy^2 + x^2) dx + (4x - 1)dy$$

dengan:

$$P(x, y) = xy^2 + x^2, Q(x, y) = 4x - 1$$

Bagian a: Hitung secara Langsung

Karena C adalah **persegi panjang**, kita hitung integral garis di sepanjang 4 sisi:

1. Sisi bawah: $y = 0, x: 0 \rightarrow 2$

$$dy = 0$$

$$dx \neq 0$$

$$P = x(0)^2 + x^2 = x^2$$

Integral:

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \text{ (skor 5)}$$

2. Sisi kanan: $x = 2, y: 0 \rightarrow 1$

$$dx = 0$$

$$dy \neq 0$$

$$Q = 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$$

Integral:

$$\int_0^1 7 dy = 7(1 - 0) = 7. \text{ (skor 5)}$$

3. Sisi atas: $y = 1, x: 2 \rightarrow 0$ (arah negatif)

$$dy = 0$$

$$dx = -dx$$

$$P = x(1)^2 + x^2 = x + x^2$$

Integral:

$$-\int_0^2 (x + x^2) dx = -\left(\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] \Big|_0^2\right). \text{ (skor 5)}$$

Hitung:

$$= -\left(\frac{4}{2} + \frac{8}{3}\right) = -\left(\frac{6}{3} + \frac{8}{3}\right) = -\frac{14}{3}$$

4. **Sisi kiri: $x = 0$, $y: 1 \rightarrow 0$ (arah negatif)**

$$dx = 0$$

$$dy = -dy$$

$$Q = 4(0) - 1 = -1$$

Integral:

$$-\int_0^1 (-1) dy = \int_0^1 1 dy = 1. \text{ (skor 5)}$$

Total integral garis langsung:

$$\frac{8}{3} + 7 + \left(-\frac{14}{3}\right) + 1 = 6. \text{ (skor 5)}$$

Bagian b: Dengan Teorema Green

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Hitung turunan:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 1) = 4$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x^2) = 2xy$$

(skor 5)

Maka:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - 2xy$$

(skor 5)

Integral ganda:

$$\iint_R (4 - 2xy) dA = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 (4 - 2xy) dy dx$$

(skor 5)

Hitung:

Integral dalam (terhadap y):

$$\int_0^1 (4 - 2xy) dy = [4y - xy^2] \Big|_0^1 = 4(1) - x(1)^2 = 4 - x$$

(skor 5)

Integral luar (terhadap x):

$$\int_0^2 (4 - x) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^2 = 4(2) - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6$$

(skor 5)

Jawaban akhir: **6**

Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

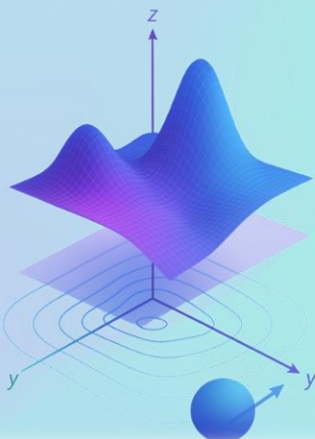
Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB XII

TEOREMA DIVERGENSI

Dalam kalkulus vektor, terdapat hubungan penting antara fluks dari medan vektor dan perilaku divergensi di dalam suatu wilayah. Teorema Divergensi, yang juga dikenal sebagai Teorema Gauss, menghubungkan integral permukaan dari suatu medan vektor dengan integral volume dari divergensinya. Teorema ini sangat penting dalam bidang fisika, khususnya dalam hukum Gauss di elektromagnetisme dan mekanika fluida. Pemahaman terhadap teorema ini memungkinkan analisis medan dalam ruang tiga dimensi secara lebih efisien, dengan mengubah integral permukaan menjadi integral volume. Setelah mempelajari bab ini, para pembaca diharapkan mampu menjelaskan hal-hal yang berkaitan dengan divergensi. Capaian pembelajaran khusus setelah pembaca mempelajari bahan ajar ini adalah:

1. Mendeskripsikan makna konseptual dan geometris dari teorema divergensi.
2. Menghitung divergensi suatu medan vektor serta fluks melalui permukaan tertutup.
3. Menerapkan teorema divergensi dalam bentuk integral untuk menyederhanakan perhitungan medan.
4. Menganalisis permasalahan dalam konteks fisika atau teknik yang melibatkan konsep divergensi dan fluks.

A. Definisi Teorema Divergensi

Jika $\vec{F} = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$ adalah medan vektor kontinu dan terdiferensialkan dengan baik di suatu wilayah V dengan permukaan penutup S , maka:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

(Apostol, 1999; Stewart, 2016).

Dengan:

- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
- $\vec{n}$ adalah vektor satuan normal keluar dari permukaan S

B. Makna Geometris dan Fisik

- **Makna Geometris:** Divergensi mengukur **laju perubahan volume lokal** dari suatu medan vektor.
- **Makna Fisik:** Jika $\vec{F}$ adalah aliran fluida, maka divergensi positif berarti ada sumber (fluida keluar), sedangkan divergensi negatif berarti ada lubang (fluida masuk).

C. Syarat Berlaku Teorema

- Medan vektor $\vec{F}$ terdiferensialkan kontinu pada seluruh volume V dan permukaan S .
- Permukaan S harus **tertutup dan terorientasi ke luar**.

D. Contoh Divergensi

Misal $\vec{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$, maka:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Contoh soal divergensi:

a) Diketahui

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

Tentukan $\text{div } \vec{F}$

b) Diketahui

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Tentukan $\text{div } \vec{F}$

Pembahasan:

a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, maka

$$M(x, y, z) = x^2, N(x, y, z) = y^2, \text{ dan } P(x, y, z) = z^2$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2x + 2y + 2z$$

b) $\vec{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, maka

$$M(x, y, z) = xy, N(x, y, z) = -\frac{1}{2}y^2, \text{ dan } P(x, y, z) = z$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{1}{2}y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = y - y + 1 = 1$$

E. Apa yang Kita Pelajari?

Misalkan

$\vec{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ sebuah medan vektor dan terdapat turunan parsial $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial y}$, dan $\frac{\partial P}{\partial z}$ maka divergensi didefinisikan.

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Teorema Divergensi menghubungkan integral volume dari divergensi suatu medan vektor dengan integral permukaan dari fluks medan tersebut.

Teorema ini hanya berlaku pada permukaan tertutup dan medan vektor yang terdiferensialkan kontinu.

Sangat bermanfaat dalam menyederhanakan perhitungan dan memahami perilaku aliran di dalam suatu volume.

F. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Gunakan Teorema Divergensi untuk menghitung fluks dari medan vektor $\vec{F}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$ keluar dari permukaan bola dengan jari-jari R yang berpusat di titik asal. **(skor 50)**
2. Diberikan $\vec{F}(x, y, z) = \langle x^2, y^2, z^2 \rangle$, hitung fluks keluar melalui permukaan kubus dengan sisi panjang 1 dan sudut di titik $(0,0,0)$. **(skor 50)**

Pembahasan:

1. a). Hitung Divergensi
 $\nabla \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$. **(skor 20)**
b). Gunakan Integral Volume
$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) \, dV = 3 \cdot \text{volume bola} = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$
(skor 20)
c). Jadi, fluks keluar dari permukaan bola adalah $4\pi R^3$. **(skor 5)**

2. a). Hitung Integral Volume
$$\iiint_V (2x + 2y + 2z) \, dV = 2(\iiint_V x \, dV + \iiint_V y \, dV + \iiint_V z \, dV)$$
(skor 10)

Karena simetri:

$$\iiint_V x \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$
(skor 30)

Total:

$$2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3$$
(skor 10)

Jadi, fluks keluar adalah **3**

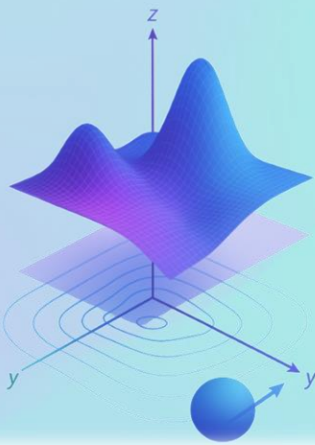
Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.



BAB XIII

TEOREMA STOKES

Dalam kalkulus vektor, Teorema Stokes merupakan salah satu teorema fundamental yang menjembatani antara integral garis dan integral permukaan. Teorema ini menyatakan bahwa integral garis dari medan vektor sepanjang suatu kurva tertutup sama dengan integral permukaan dari rotasi (*curl*) medan vektor tersebut di atas permukaan yang dibatasi oleh kurva itu (Marsden & Tromba, 2012; Weir *et al.*, 2014).

Teorema ini penting karena menghubungkan perubahan lokal suatu medan vektor (dengan rotasi) terhadap sirkulasi global di sepanjang batas permukaan. Aplikasinya sangat luas, mulai dari medan elektromagnetik hingga dinamika fluida. Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Mendeskripsikan konsep dan makna geometris Teorema Stokes serta interpretasinya dalam konteks fisik.
2. Menghitung *curl* dari suatu medan vektor dan menerapkannya dalam integral permukaan.
3. Menerapkan Teorema Stokes untuk menyederhanakan perhitungan integral garis atau integral permukaan.
4. Menganalisis hubungan antara rotasi medan vektor dengan sirkulasi dan arah orientasi kurva batas.

A. Pernyataan Teorema Stokes

Jika $\vec{F}$ merupakan suatu medan vektor yang terdiferensialkan dengan baik pada permukaan halus S yang dibatasi oleh kurva tertutup C , maka integral garis dari $\vec{F}$ sepanjang C dapat dinyatakan sebagai integral permukaan dari rotasi ($\nabla \times \vec{F}$) terhadap vektor normal permukaan $\vec{n}$ di atas S . Hubungan ini diformulasikan melalui Teorema Stokes sebagai berikut:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

(Marsden & Tromba, 2012).

Dengan:

- $\vec{F}$: medan vektor terdiferensialkan,
- C : kurva tertutup yang orientasinya sesuai dengan arah tangan kanan terhadap permukaan S ,
- S : permukaan halus yang dibatasi oleh C ,
- $\vec{n}$ vektor normal satuan permukaan S .
- $\nabla \times \vec{F}$ adalah *curl* (rotasi) dari $\vec{F}$,

Konsep *Curl*:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

B. Interpretasi Geometris dan Fisik

- Geometris: Teorema Stokes menghubungkan total sirkulasi (integral garis) dari medan vektor di sepanjang kurva tertutup dengan jumlah rotasi lokal (*curl*) pada permukaan yang dibatasi oleh kurva itu (Marsden & Tromba, 2012; Weir *et al.*, 2014).
- Fisik: Dalam fisika, digunakan untuk menjelaskan fenomena seperti arus pusaran air atau medan magnet melingkar di sekitar arus listrik.

C. Langkah Penyelesaian Menggunakan Teorema Stokes

Tentukan medan vektor $\vec{F}$, kurva batas C , dan permukaan S ; Hitung $\nabla \times \vec{F}$; Hitung integral permukaan dari $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$; Bandingkan hasil dengan integral garis $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ bila diperlukan.

Contoh soal:

- a) Terapkan Teorema Stokes untuk menghitung integral garis $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, dengan $\vec{F}(x, y, z) = \langle -y, x, 0 \rangle$, dan C adalah kurva lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ di bidang $z = 0$, berorientasi positif (berlawanan arah jarum jam bila dilihat dari atas).
- b) Diberikan $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$
Kurva C adalah batas dari segitiga dengan simpul di $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ pada bidang $z = 0$, berorientasi positif. Hitung $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Pembahasan:

- a) **Tentukan Curl:**

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle$$

Pilih permukaan S :

Bidang $z = 0$, cakram unit $x^2 + y^2 \leq 1$

Normal permukaan $\vec{n} = \hat{k}$, maka:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = 2$$

Hitung integral permukaan:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S 2 dS = 2 \cdot \text{luas cakram} = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi;$$

$$b) \nabla \times \vec{F} = \langle -1, -1, -1 \rangle$$

S : segitiga di bidang $z = 0$, maka $\vec{n} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = -1$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S -1 \, dS = -\frac{1}{2}$$

D. Apa yang Kita Pelajari?

Teorema Stokes menghubungkan integral garis dengan integral permukaan dari curl.

Penting dalam fisika dan rekayasa untuk menyederhanakan perhitungan sirkulasi.

Memerlukan medan vektor terdiferensialkan dan permukaan halus serta kurva tertutup.

E. Uji Pemahaman Materi

Silakan kerjakan latihan berikut untuk melihat sejauh mana Anda menguasai materi.

1. Diberikan $\vec{F}(x, y, z) = \langle yz, xz, xy \rangle$ dan C adalah batas permukaan kuadran pertama dari lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ pada bidang $z = 1$, orientasi positif. Hitung $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. **(skor 30)**
2. Diberikan $\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$ dan C adalah kurva batas persegi sisi 2 pada bidang $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, arah berlawanan jarum jam dari arah sumbu x positif. Hitung $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. **(skor 30)**

3. Diberikan $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$. Kurva C adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ di bidang $z = 0$, arah berlawanan jarum jam. Hitung $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (skor 40)

Pembahasan:

1. $\nabla \times \vec{F} = \langle x - x, y^2 - y, z - z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$. (skor 20)
Maka $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. (skor 10)

2. **Diberikan:**

Medan vektor:

$$\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$$

Kurva C : batas persegi sisi 1 pada bidang $x = 0$, dengan:

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

Arah lintasan: berlawanan arah jarum jam dilihat dari arah sumbu- x positif, artinya arah lintasan sesuai orientasi permukaan menghadap arah $+x$.

Gunakan Teorema Stokes

Teorema Stokes menyatakan:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

Kita perlu:

1. Hitung $\nabla \times \vec{F}$
2. Hitung $\hat{n}$ dan elemen luas dS
3. Evaluasi integral permukaan

Langkah 1: Hitung Rotasi (*Curl*)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y & x \end{vmatrix}$$

Hitung komponen:

- $\hat{i}: \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$
- $\hat{j}: -(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial z}) = -(1 - 1) = 0$
- $\hat{k}: \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 0 = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

(skor 20)

Langkah 2: Substitusi ke Teorema Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{0} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

(skor 10)

Jawaban akhir: 0

3. Kita mempunyai $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$
Kurva C adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ di bidang $z = 0$, orientasi **berlawanan jarum jam** dilihat dari arah sumbu z positif.

Gunakan Teorema Stokes

Teorema Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

Langkah 1: Hitung $\text{Curl } \nabla \times \vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \quad (\text{skor 10})$$

Hitung komponen:

- $\hat{i}: \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} = 0 - 1 = -1$
- $\hat{j}: -\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) = -(1 - 0) = -1$
- $\hat{k}: \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

(skor 5)

Sehingga:

$$\nabla \times \vec{F} = \langle -1, -1, -1 \rangle$$

Langkah 2: Tentukan $\vec{n}$

Permukaan S adalah lingkaran di bidang $z = 0$, orientasi positif berarti $\vec{n} \langle 0, 0, 1 \rangle$. (skor 5)

Langkah 3: Hitung $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}$

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \langle -1, -1, -1 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = -1. \quad (\text{skor 5})$$

Langkah 4: Luas Lingkaran

Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ memiliki jari-jari $r = 2$, sehingga luasnya:

$$\text{Luas} = \pi r^2 = \pi(2^2) = 4\pi. \quad (\text{skor 5})$$

Langkah 5: Integral Permukaan

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = (-1)(4\pi) = -4\pi. \quad (\text{skor 10})$$

Jawaban akhir:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4\pi$$

Setelah Anda menyelesaikan seluruh materi dalam bab ini, luangkan waktu sejenak untuk melakukan **refleksi terhadap proses belajar Anda**. Tujuan refleksi ini adalah membantu Anda menilai secara mandiri seberapa jauh pemahaman dan penguasaan Anda terhadap materi yang telah dipelajari.

Silakan beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai:

No	Pernyataan Refleksi	Sudah	Belum
1	Saya memahami dengan jelas tujuan pembelajaran dalam bab ini.	☐	☐
2	Saya mampu menjelaskan konsep utama secara ringkas dan sistematis.	☐	☐
3	Saya dapat mengikuti contoh penyelesaian soal dan memahami langkah-langkahnya.	☐	☐
4	Saya sanggup menyelesaikan latihan soal tanpa melihat pembahasan terlebih dulu.	☐	☐
5	Saya bisa mengaitkan materi ini dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.	☐	☐
6	Saya merasa siap untuk mengikuti ujian atau tes mengenai materi ini.	☐	☐

Petunjuk interpretasi:

Apabila Anda menjawab "Sudah" pada lima atau lebih pernyataan di atas, maka Anda telah memahami materi dengan baik. Jika belum, sebaiknya Anda meninjau kembali bagian-bagian yang belum dikuasai, dan berdiskusi dengan pengajar atau rekan belajar Anda.

DAFTAR PUSTAKA

- Adams, R. A., & Essex, C. (2010). *Calculus: A Complete Course* (G. Bennett, C. Sullivan, M. Ranadive, M. A. Blair, & V. Adams, Eds.; 7th ed.). Pearson Canada.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (D. Dietz, E. Keohane, B. Pearson, C. Welsh, K. Weinstein, & S. Goldstein, Eds.; 10th ed.). John Wiley & Sons, Inc. <https://3lihandam69.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/10/calculus-10th-edition-anton.pdf>
- Apostol, T. M. (1999). *Calculus: Vol. II* (Second). John Wiley & Sons. <https://theswissbay.ch/pdf/Gentoomen%20Library/Maths/Calculus/Tom%20Apostol%20-%20Calculus%20Vol.2%20-%20Multi-Variable%20Calculus%20and%20Linear%20Algebra%20with%20Applications.pdf>
- Ariawan, R., & Zetriuslita, Z. (2023). Implementasi Model Problem Based Learning dan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis dalam Bahan Ajar Kalkulus. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), 503–515. <https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i1.2073>
- Budhi, W. S. (1996). *Kalkulus Peubah Banyak*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.
- Dawkins, P. (2025, June 22). *Calculus III*. <https://Tutorial.Math.Lamar.Edu/Courses/CalcIII/CalcIII.aspx>.
- Istikomah, E. (2022). *Kalkulus I* (E. Istikomah, Ed.). Universitas Islam Riau (UIR) Press. <https://repository.uir.ac.id/24838/1/BUku%20Kalkulus%201%20dan%20HAKI.pdf>
- Leithold, L. (1972). *The Calculus with Analytic Geometry* (Second). Harper & Row. <https://ilide.info/doc-viewer-v2>
- Marsden, J. E. ., & Tromba, Anthony. (2012). *Additional Content for Vector Calculus* (Sixth). W.H. Freeman and Co. <https://users.math.msu.edu/users/magyarp/math254h/M&T-Supplement.pdf>

- Muzakir, U. (2018). *Kalkulus II* (1st ed.). Bandar Publishing, Anggota IKAPI. https://repository.bbg.ac.id/bitstream/764/1/Kalkulus_II.pdf
- Patrick J. (2012, June). *Finding a Taylor Polynomial to Approximate a Function, Ex 1*. YouTube.
- Purcell, E. J., & Varberg, D. (1987). *Calculus (Ninth Edition) - Varberg, Purcell, Rigdon* (I. N. Susila & B. G. Kartasasmita, Trans.; fifth). Bandung: Erlangga.
https://spada.uns.ac.id/pluginfile.php/146458/mod_resource/content/1/Calculus%20%28%20Ninth%20Edition%20%29%20-%20Varberg%2C%20Purcell%2C%20Rigdon.pdf
- Soedijono, B. (2008). *Kalkulus III (BMP): Vol. ketiga* (E. R. Palupi, Ed.; kesatu). Universitas Terbuka.
- Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (K. Yownes & TEHarts, Eds.; eighth). Cengage Learning.
<https://www.mymathcloud.com/api/download/modules/AP-Calculus/Textbooks/Calculus%20Stewart.pdf?id=149258416>
- Warsito. (2020). *Kalkulus III (BMP)* (S. A. Farihati, E. Herlinawati, & I. Rosyid, Eds.; Kedua, Vol. 1). Universitas Terbuka.
- Weir, M. D., Hass, Joel., & Thomas, G. B. (2014). *Thomas' Calculus: Early Transcendentals: based on the original work by George B. Thomas, Jr. Massachusetts Institute of Technology* (13th ed.). Pearson.
https://rodrigopacios.github.io/mrpaacios/download/Thomas_Calculus.pdf

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dimulai dengan pengenalan fungsi peubah banyak, buku ini kemudian mengulas limit dan kekontinuan serta derivatif parsial sebagai fondasi penting. Pembahasan berlanjut ke derivatif fungsi implisit dan nilai ekstrem bersyarat, yang esensial dalam optimasi. Pembaca juga akan mendalami Formula dan Deret Taylor untuk fungsi peubah banyak, serta integral fungsi bernilai vektor, integral lipat dua, dan integral lipat tiga, yang merupakan alat-alat penting dalam matematika dan fisika. Setiap bab dirancang dengan struktur yang konsisten, meliputi pendahuluan, materi inti, rangkuman pembelajaran, dan uji pemahaman, memastikan alur belajar yang terstruktur.

Pada bagian akhir, buku ini menyajikan konsep-konsep tingkat lanjut yang krusial dalam kalkulus vektor. Pembahasan dimulai dengan integral garis dengan parameter, kemudian menguraikan tiga teorema fundamental kalkulus vektor: Teorema Green, Teorema Divergensi, dan Teorema Stokes. Teorema-teorema ini menghubungkan integral di berbagai dimensi, menjadi pilar penting dalam fisika dan rekayasa. Dengan struktur yang terstruktur dan cara yang berurutan, buku ini membekali pembaca dengan pemahaman mendalam tentang kalkulus multivariabel, dari konsep dasar hingga aplikasi pada berbagai masalah ilmiah dan teknis.

Penerbit Deepublish (CV BUDI UTAMA)

Jl. Kaliurang Km 9,3 Yogyakarta 55581

Telp/Fax : (0274) 4533427

Anggota IKAPI (076/DIY/2012)

✉ cs@deepublish.co.id

📞 Penerbit Deepublish

📧 @penerbitbuku_deepublish

🌐 www.penerbitdeepublish.com



Kategori : Kalkulus

ISBN 978-634-01-1419-5



9

786340

114195